Εισαγωγή στα Αξιώματα Μεγάλων Πληθαρίθμων

(Διάλεξη II)

Κωνσταντίνος Τσαπρούνης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Μεταπτυχιακό Μάθημα «Προχωρημένα Θέματα Λογικής»

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο – ΜΠΛΑ/ΑΛΜΑ

25 Απριλίου 2017

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.
6. **Αξίωμα του απείρου:** υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.
6. **Αξίωμα του απείρου:** υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.
7. **Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x, y)$ που ορίζει συνάρτηση, υπάρχει το σύνολο $\{y : (\exists x)(x \in A \wedge \Phi(x, y))\}$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.
6. **Αξίωμα του απείρου:** υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.
7. **Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x, y)$ που ορίζει συνάρτηση, υπάρχει το σύνολο $\{y : (\exists x)(x \in A \wedge \Phi(x, y))\}$.
8. **Αξίωμα της επιλογής:** κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.
6. **Αξίωμα του απείρου:** υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.
7. **Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x, y)$ που ορίζει συνάρτηση, υπάρχει το σύνολο $\{y : (\exists x)(x \in A \wedge \Phi(x, y))\}$.
8. **Αξίωμα της επιλογής:** κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.
9. **Αξίωμα της θεμελίωσης:** κάθε μη κενό σύνολο έχει ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (Ι)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in$ **ON**, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (Ι)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in$ **ON**, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- (Οριακός διατακτικός)
  Αν $\lambda \in$ **ON** είναι οριακός, θέτουμε $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in \mathbf{ON}$, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- (Οριακός διατακτικός)
  Αν $\lambda \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, θέτουμε $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$.
- Τέλος, θέτουμε $V = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in \mathbf{ON}$, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- (Οριακός διατακτικός)
  Αν $\lambda \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, θέτουμε $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$.
- Τέλος, θέτουμε $V = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$.

Αντίστοιχα, για την κλάση L των *κατασκευάσιμων* συνόλων του Gödel, για κάθε $\alpha + 1 \in \mathbf{ON}$ θεωρούμε μόνο τα υποσύνολα του τρέχοντος L_α που είναι *ορίσιμα* (στο L_α, ίσως με παραμέτρους) από κάποιον πρωτοβάθμιο τύπο.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

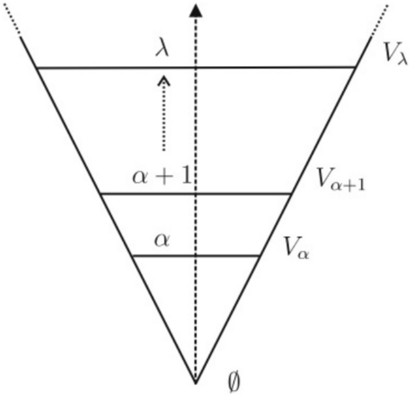
Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in \mathbf{ON}$, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- (Οριακός διατακτικός)
  Αν $\lambda \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, θέτουμε $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$.
- Τέλος, θέτουμε $V = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha$.

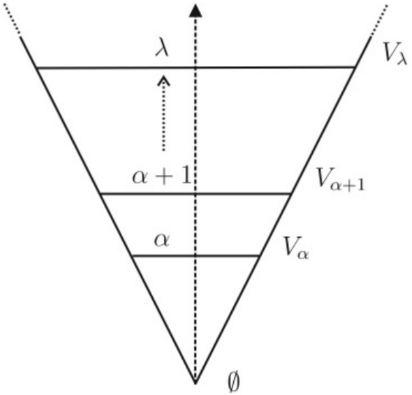
Αντίστοιχα, για την κλάση L των *κατασκευάσιμων* συνόλων του Gödel, για κάθε $\alpha + 1 \in \mathbf{ON}$ θεωρούμε μόνο τα υποσύνολα του τρέχοντος L_α που είναι *ορίσιμα* (στο L_α, ίσως με παραμέτρους) από κάποιον πρωτοβάθμιο τύπο.

Οι (γνήσιες) κλάσεις V και L αποτελούν αρχετυπικά «μοντέλα» της ZFC.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (II)

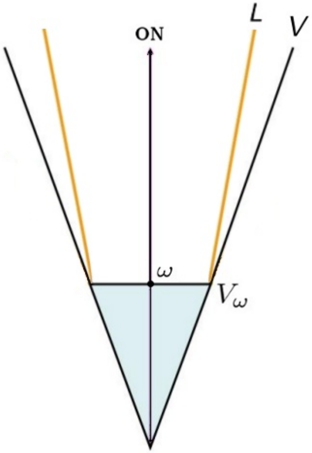


Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (II)



Για κάθε σύνολο $x \in V$, ορίζουμε την **τάξη** του (γράφουμε: $\text{rank}(x)$) να είναι ο ελάχιστος $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $x \in V_{\alpha+1}$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (II)



Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

- **Η Υπόθεση του Souslin**, από τη Θεωρία διατάξεων.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Jech (1967), Tennenbaum (1968), Solovay & Tennenbaum (1971).

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

- **Η Υπόθεση του Souslin**, από τη Θεωρία διατάξεων.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Jech (1967), Tennenbaum (1968), Solovay & Tennenbaum (1971).
- **Το Πρόβλημα του Whitehead**, από την Άλγεβρα.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Shelah (1974).

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

- **Η Υπόθεση του Souslin**, από τη Θεωρία διατάξεων.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Jech (1967), Tennenbaum (1968), Solovay & Tennenbaum (1971).
- **Το Πρόβλημα του Whitehead**, από την Άλγεβρα.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Shelah (1974).
- **Η Εικασία του Borel**, από την Ανάλυση.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Laver (1976).

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

- **Η Υπόθεση του Souslin**, από τη Θεωρία διατάξεων.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Jech (1967), Tennenbaum (1968), Solovay & Tennenbaum (1971).
- **Το Πρόβλημα του Whitehead**, από την Άλγεβρα.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Shelah (1974).
- **Η Εικασία του Borel**, από την Ανάλυση.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Laver (1976).
- **Η Εικασία του Kaplansky**, από την Ανάλυση.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Solovay & Woodin (1976).

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκοπό τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Δύο κυρίαρχα (και εκτενώς μελετημένα) είδη αξιωμάτων:

- **Αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων** (large cardinal axioms)
- **Αξιώματα forcing** (forcing axioms)

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Δύο κυρίαρχα (και εκτενώς μελετημένα) είδη αξιωμάτων:

- **Αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων** (large cardinal axioms)
- **Αξιώματα forcing** (forcing axioms)

(Παρά τη στενή σύνδεση των δύο ειδών, εδώ ασχολούμαστε μόνο με τα πρώτα.)

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Δύο κυρίαρχα (και εκτενώς μελετημένα) είδη αξιωμάτων:

- **Αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων** (large cardinal axioms)
- **Αξιώματα forcing** (forcing axioms)

(Παρά τη στενή σύνδεση των δύο ειδών, εδώ ασχολούμαστε μόνο με τα πρώτα.)

Τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων διατείνονται την ύπαρξη ολοένα και ισχυρότερων (ως προς τις ιδιότητες που ικανοποιούν) άπειρων συνόλων.

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Δύο κυρίαρχα (και εκτενώς μελετημένα) είδη αξιωμάτων:

- **Αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων** (large cardinal axioms)
- **Αξιώματα forcing** (forcing axioms)

(Παρά τη στενή σύνδεση των δύο ειδών, εδώ ασχολούμαστε μόνο με τα πρώτα.)

Τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων διατείνονται την ύπαρξη ολοένα και ισχυρότερων (ως προς τις ιδιότητες που ικανοποιούν) άπειρων συνόλων.

Ιστορικά, το πρώτο παράδειγμα (ήδη από τον Hausdorff) είναι αυτό του «απρόσιτου» (inaccessible) πληθαρίθμου.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\text{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \text{ZFC}$.

Έπεται πως (αν η ZFC είναι συνεπής, τότε) η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

Έπεται πως (αν η ZFC είναι συνεπής, τότε) η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων.

Γενικά, τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων είναι γνησίως ισχυρότερα, ως προς την ισχύ συνέπειας, από τη ZFC

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

Έπεται πως (αν η ZFC είναι συνεπής, τότε) η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων.

Γενικά, τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων είναι γνησίως ισχυρότερα, ως προς την ισχύ συνέπειας, από τη ZFC (και άρα και μη αποδείξιμα από αυτήν, εκτός κι αν η ZFC ασυνεπής).

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

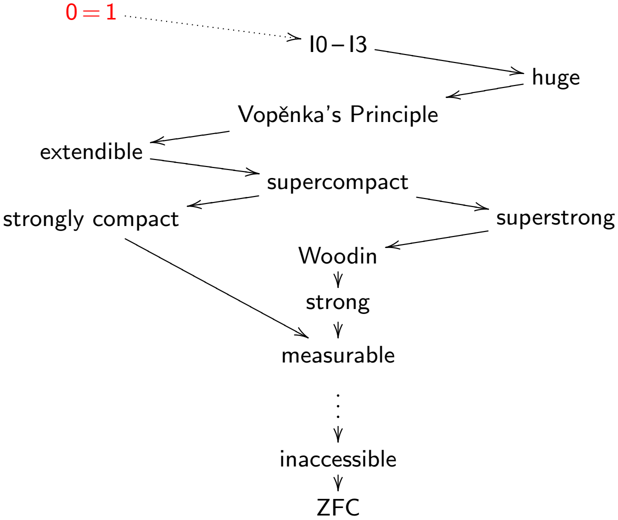
- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

Έπεται πως (αν η ZFC είναι συνεπής, τότε) η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων.

Γενικά, τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων είναι γνησίως ισχυρότερα, ως προς την ισχύ συνέπειας, από τη ZFC (και άρα και μη αποδείξιμα από αυτήν, εκτός κι αν η ZFC ασυνεπής).

Τα αξιώματα αυτά δημιουργούν μία ιεραρχία (δείτε διάγραμμα) μέσω της οποίας μπορούμε να «μετρήσουμε» (συγκρίνοντας) την ισχύ συνέπειας οποιασδήποτε ανεξάρτητης συνολοθεωρητικής (μαθηματικής) πρότασης.

Το διάγραμμα των μεγάλων πληθαρίθμων



Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**:

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και έχει την «Ιδιότητα του Δέντρου»: κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα είναι όλα μεγέθους $< \kappa$ έχει ένα κλαδί μήκους κ.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και έχει την «Ιδιότητα του Δέντρου»: κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα είναι όλα μεγέθους $< \kappa$ έχει ένα κλαδί μήκους κ.

Πρόταση

Ο $\kappa > \omega$ είναι weakly compact αν και μόνο αν, για κάθε $f : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \kappa$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^2$.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και έχει την «Ιδιότητα του Δέντρου»: κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα είναι όλα μεγέθους $< \kappa$ έχει ένα κλαδί μήκους κ.

Πρόταση

Ο $\kappa > \omega$ είναι weakly compact αν και μόνο αν, για κάθε $f : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \kappa$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^2$.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός γράφεται, συνήθως, με το «συμβολισμό του βέλους»:

$$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2 \,,$$

όπου ο κάτω δείκτης «2», ο οποίος αναφέρεται στο πεδίο τιμών $2 = \{0, 1\}$ της συνάρτησης «χρωματισμού» f, συνήθως παραλείπεται.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και έχει την «Ιδιότητα του Δέντρου»: κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα είναι όλα μεγέθους $< \kappa$ έχει ένα κλαδί μήκους κ.

Πρόταση

Ο $\kappa > \omega$ είναι weakly compact αν και μόνο αν, για κάθε $f : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \kappa$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^2$.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός γράφεται, συνήθως, με το «συμβολισμό του βέλους»:

$$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2 \,,$$

όπου ο κάτω δείκτης «2», ο οποίος αναφέρεται στο πεδίο τιμών $2 = \{0, 1\}$ της συνάρτησης «χρωματισμού» f, συνήθως παραλείπεται.

Οι weakly compact έχουν πλειάδα εναλλακτικών χαρακτηρισμών.

Ο «συμβολισμός του βέλους»

Υπενθύμιση: για κάθε σύνολο A και κάθε πληθάριθμο $\nu \leqslant |A|$, θέτουμε:

$$[A]^{\nu} = \{X \subseteq A : |X| = \nu\}.$$

Ο «συμβολισμός του βέλους»

Υπενθύμιση: για κάθε σύνολο A και κάθε πληθάριθμο $\nu \leqslant |A|$, θέτουμε:

$$[A]^{\nu} = \{X \subseteq A : |X| = \nu\}.$$

Ορισμός

Έστω κ, λ, ν, μ κάποιοι άπειροι ή πεπερασμένοι (μη μηδενικοί) πληθάριθμοι.

Ο «συμβολισμός του βέλους»

Υπενθύμιση: για κάθε σύνολο A και κάθε πληθάριθμο $\nu \leqslant |A|$, θέτουμε:

$$[A]^{\nu} = \{X \subseteq A : |X| = \nu\}.$$

Ορισμός

Έστω κ, λ, ν, μ κάποιοι άπειροι ή πεπερασμένοι (μη μηδενικοί) πληθάριθμοι.
Ο **συμβολισμός του βέλους** «$\kappa \longrightarrow (\lambda)^{\nu}_{\mu}$» σημαίνει ότι ισχύει το ακόλουθο:

Ο «συμβολισμός του βέλους»

Υπενθύμιση: για κάθε σύνολο A και κάθε πληθάριθμο $\nu \leqslant |A|$, θέτουμε:

$$[A]^\nu = \{X \subseteq A : |X| = \nu\}.$$

Ορισμός

Έστω κ, λ, ν, μ κάποιοι άπειροι ή πεπερασμένοι (μη μηδενικοί) πληθάριθμοι.

Ο **συμβολισμός του βέλους** «$\kappa \longrightarrow (\lambda)^\nu_\mu$» σημαίνει ότι ισχύει το ακόλουθο:

Για κάθε $f : [\kappa]^\nu \longrightarrow \mu$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^\nu$, δηλαδή, υπάρχει $i < \mu$ τέτοιο ώστε $f[[H]^\nu] = \{i\}$.

Ο «συμβολισμός του βέλους»

Υπενθύμιση: για κάθε σύνολο A και κάθε πληθάριθμο $\nu \leqslant |A|$, θέτουμε:

$$[A]^\nu = \{X \subseteq A : |X| = \nu\}\,.$$

Ορισμός

Έστω κ, λ, ν, μ κάποιοι άπειροι ή πεπερασμένοι (μη μηδενικοί) πληθάριθμοι.
Ο **συμβολισμός του βέλους** « $\kappa \longrightarrow (\lambda)^\nu_\mu$ » σημαίνει ότι ισχύει το ακόλουθο:
Για κάθε $f : [\kappa]^\nu \longrightarrow \mu$*, υπάρχει* $H \subseteq \kappa$ *με* $|H| = \lambda$ *τέτοιο ώστε η* f *είναι σταθερή στο* $[H]^\nu$*, δηλαδή, υπάρχει* $i < \mu$ *τέτοιο ώστε* $f[[H]^\nu] = \{i\}$.

Διαισθητικά: για κάθε χρωματισμό των ν-υποσυνόλων του κ με μ χρώματα, υπάρχει ένα $H \subseteq \kappa$ μεγέθους λ που είναι «μονοχρωματικό», δηλαδή, όλα τα ν-υποσύνολα του H παίρνουν το ίδιο χρώμα.

Ο «συμβολισμός του βέλους»

Υπενθύμιση: για κάθε σύνολο A και κάθε πληθάριθμο $\nu \leqslant |A|$, θέτουμε:

$$[A]^\nu = \{X \subseteq A : |X| = \nu\}\,.$$

Ορισμός

Έστω κ, λ, ν, μ κάποιοι άπειροι ή πεπερασμένοι (μη μηδενικοί) πληθάριθμοι.
Ο **συμβολισμός του βέλους** «$\kappa \longrightarrow (\lambda)^\nu_\mu$» σημαίνει ότι ισχύει το ακόλουθο:
Για κάθε $f : [\kappa]^\nu \longrightarrow \mu$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^\nu$, δηλαδή, υπάρχει $i < \mu$ τέτοιο ώστε $f[[H]^\nu] = \{i\}$.

Διαισθητικά: για κάθε χρωματισμό των ν-υποσυνόλων του κ με μ χρώματα, υπάρχει ένα $H \subseteq \kappa$ μεγέθους λ που είναι «μονοχρωματικό», δηλαδή, όλα τα ν-υποσύνολα του H παίρνουν το ίδιο χρώμα.
Συνήθως $\mu = 2$, οπότε παραλείπουμε το μ και γράφουμε «$\kappa \longrightarrow (\lambda)^\nu$».

Ο «συμβολισμός του βέλους»

Υπενθύμιση: για κάθε σύνολο A και κάθε πληθάριθμο $\nu \leqslant |A|$, θέτουμε:

$$[A]^\nu = \{X \subseteq A : |X| = \nu\}.$$

Ορισμός

Έστω κ, λ, ν, μ κάποιοι άπειροι ή πεπερασμένοι (μη μηδενικοί) πληθάριθμοι.
Ο **συμβολισμός του βέλους** «$\kappa \longrightarrow (\lambda)^\nu_\mu$» σημαίνει ότι ισχύει το ακόλουθο:
Για κάθε $f : [\kappa]^\nu \longrightarrow \mu$, *υπάρχει* $H \subseteq \kappa$ *με* $|H| = \lambda$ *τέτοιο ώστε η* f *είναι σταθερή στο* $[H]^\nu$, *δηλαδή, υπάρχει* $i < \mu$ *τέτοιο ώστε* $f[[H]^\nu] = \{i\}$.

Διαισθητικά: για κάθε χρωματισμό των ν-υποσυνόλων του κ με μ χρώματα, υπάρχει ένα $H \subseteq \kappa$ μεγέθους λ που είναι «μονοχρωματικό», δηλαδή, όλα τα ν-υποσύνολα του H παίρνουν το ίδιο χρώμα.
Συνήθως $\mu = 2$, οπότε παραλείπουμε το μ και γράφουμε «$\kappa \longrightarrow (\lambda)^\nu$».

Πεπερασμένο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\ell, \nu, \mu \in \omega$, υπάρχει $k \in \omega$ τέτοιο ώστε $k \longrightarrow (\ell)^\nu_\mu$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey (∼1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Ερωτήματα

Τί γίνεται για $\nu = 2$ και $\lambda > \omega$;

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Ερωτήματα

Τί γίνεται για $\nu = 2$ και $\lambda > \omega$; Ειδικότερα, ισχύει το $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^2$;

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Ερωτήματα

Τί γίνεται για $\nu = 2$ και $\lambda > \omega$; Ειδικότερα, ισχύει το $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^2$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega_1$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^2$;

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Ερωτήματα

Τί γίνεται για $\nu = 2$ και $\lambda > \omega$; Ειδικότερα, ισχύει το $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^2$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega_1$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^2$;

Θεώρημα (Sierpiński, 1933; Kurepa, 1941)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$, έχουμε ότι $2^{\kappa} \not\longrightarrow (\kappa^{+})^2$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Ερωτήματα

Τί γίνεται για $\nu = 2$ και $\lambda > \omega$; Ειδικότερα, ισχύει το $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^2$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega_1$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^2$;

Θεώρημα (Sierpiński, 1933; Kurepa, 1941)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$, έχουμε ότι $2^\kappa \not\longrightarrow (\kappa^+)^2$.

Θέτοντας $\kappa = \omega$, άμεσα έπεται ότι $\omega_1 \not\longrightarrow (\omega_1)^2$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Ερωτήματα

Τί γίνεται για $\nu = 2$ και $\lambda > \omega$; Ειδικότερα, ισχύει το $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^2$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega_1$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^2$;

Θεώρημα (Sierpiński, 1933; Kurepa, 1941)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$, έχουμε ότι $2^{\kappa} \not\longrightarrow (\kappa^{+})^2$.

Θέτοντας $\kappa = \omega$, άμεσα έπεται ότι $\omega_1 \not\longrightarrow (\omega_1)^2$.

Συμβολισμός: αν κ πληθάριθμος τότε $\beth_0(\kappa) = \kappa$ και $\beth_{n+1}(\kappa) = 2^{\beth_n(\kappa)}$ (για $n \in \omega$).

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Ερωτήματα

Τί γίνεται για $\nu = 2$ και $\lambda > \omega$; Ειδικότερα, ισχύει το $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^2$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega_1$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^2$;

Θεώρημα (Sierpiński, 1933; Kurepa, 1941)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$, έχουμε ότι $2^{\kappa} \not\longrightarrow (\kappa^{+})^2$.

Θέτοντας $\kappa = \omega$, άμεσα έπεται ότι $\omega_1 \not\longrightarrow (\omega_1)^2$.
Συμβολισμός: αν κ πληθάριθμος τότε $\beth_0(\kappa) = \kappa$ και $\beth_{n+1}(\kappa) = 2^{\beth_n(\kappa)}$ (για $n \in \omega$).

Θεώρημα (Erdös – Rado, 1956)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$ και κάθε $n \in \omega$, έχουμε ότι $(\beth_n(\kappa))^{+} \longrightarrow (\kappa^{+})^{n+1}_{\kappa}$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (I)

Άπειρο Θεώρημα Ramsey ($\sim$1930)

Για κάθε μη μηδενικούς $\nu, \mu \in \omega$, ισχύει ότι $\omega \longrightarrow (\omega)^{\nu}_{\mu}$.

Ερωτήματα

Τί γίνεται για $\nu = 2$ και $\lambda > \omega$; Ειδικότερα, ισχύει το $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^2$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega_1$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega_1)^2$;

Θεώρημα (Sierpiński, 1933; Kurepa, 1941)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$, έχουμε ότι $2^{\kappa} \not\longrightarrow (\kappa^+)^2$.

Θέτοντας $\kappa = \omega$, άμεσα έπεται ότι $\omega_1 \not\longrightarrow (\omega_1)^2$.
Συμβολισμός: αν κ πληθάριθμος τότε $\beth_0(\kappa) = \kappa$ και $\beth_{n+1}(\kappa) = 2^{\beth_n(\kappa)}$ (για $n \in \omega$).

Θεώρημα (Erdös – Rado, 1956)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$ και κάθε $n \in \omega$, έχουμε ότι $(\beth_n(\kappa))^+ \longrightarrow (\kappa^+)^{n+1}_{\kappa}$.

Θέτοντας $\kappa = \omega$ και $n = 1$, άμεσα έπεται ότι $\mathfrak{c}^+ \longrightarrow (\omega_1)^2$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$;

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$;

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$;
Ειδικότερα, υπάρχει κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega)^\omega$;

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$; Ειδικότερα, υπάρχει κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega)^\omega$;

Θεώρημα

Έστω πληθάριθμος $\kappa > \omega$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$; Ειδικότερα, υπάρχει κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega)^\omega$;

Θεώρημα

Έστω πληθάριθμος $\kappa > \omega$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- ο κ είναι weakly compact

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$; Ειδικότερα, υπάρχει κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega)^\omega$;

Θεώρημα

Έστω πληθάριθμος $\kappa > \omega$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- ο κ είναι weakly compact
- $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$; Ειδικότερα, υπάρχει κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega)^\omega$;

Θεώρημα

Έστω πληθάριθμος $\kappa > \omega$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- ο κ είναι weakly compact
- $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$
- για κάθε (μη μηδενικούς) $\nu \in \omega$ και $\mu < \kappa$, ισχύει ότι $\kappa \longrightarrow (\kappa)^\nu_\mu$

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$; Ειδικότερα, υπάρχει κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega)^\omega$;

Θεώρημα

Έστω πληθάριθμος $\kappa > \omega$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- ο κ είναι weakly compact
- $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$
- για κάθε (μη μηδενικούς) $\nu \in \omega$ και $\mu < \kappa$, ισχύει ότι $\kappa \longrightarrow (\kappa)^\nu_\mu$

Θεώρημα (Erdös – Rado, 1952)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$, έχουμε ότι $\kappa \not\longrightarrow (\omega)^\omega$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$; Ειδικότερα, υπάρχει κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega)^\omega$;

Θεώρημα

Έστω πληθάριθμος $\kappa > \omega$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- ο κ είναι weakly compact
- $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$
- για κάθε (μη μηδενικούς) $\nu \in \omega$ και $\mu < \kappa$, ισχύει ότι $\kappa \longrightarrow (\kappa)^\nu_\mu$

Θεώρημα (Erdös – Rado, 1952)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$, έχουμε ότι $\kappa \not\longrightarrow (\omega)^\omega$.

Φυσικά, υποθέτουμε πάντα (σιωπηλά) το Αξίωμα της Επιλογής (AC).

Άπειρη θεωρία Ramsey (II)

Ερωτήματα

Υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$; Επίσης, τί γίνεται όταν $\nu \geqslant \omega$; Ειδικότερα, υπάρχει κ τέτοιο ώστε να ισχύει $\kappa \longrightarrow (\omega)^\omega$;

Θεώρημα

Έστω πληθάριθμος $\kappa > \omega$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- ο κ είναι weakly compact
- $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$
- για κάθε (μη μηδενικούς) $\nu \in \omega$ και $\mu < \kappa$, ισχύει ότι $\kappa \longrightarrow (\kappa)^\nu_\mu$

Θεώρημα (Erdös – Rado, 1952)

Για κάθε πληθάριθμο $\kappa \geqslant \omega$, έχουμε ότι $\kappa \not\longrightarrow (\omega)^\omega$.

Φυσικά, υποθέτουμε πάντα (σιωπηλά) το Αξίωμα της Επιλογής (AC). Χωρίς αυτό, π.χ., ο Martin έδειξε ότι το Axiom of Determinacy (AD) (το οποίο δεν είναι συμβατό με το AC) συνεπάγεται ότι $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^{\omega_1}$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} [\kappa]^n$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} [\kappa]^n$.

Έτσι, το $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}$ σημαίνει ότι υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η δεδομένη $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$ είναι σταθερή στο $[H]^n$, για κάθε $n \in \omega$.

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} [\kappa]^n$.

Έτσι, το $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}$ σημαίνει ότι υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η δεδομένη $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$ είναι σταθερή στο $[H]^n$, για κάθε $n \in \omega$.

Ερωτήματα

Ισχύει το $\omega \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$;

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} [\kappa]^n$.

Έτσι, το $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}$ σημαίνει ότι υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η δεδομένη $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$ είναι σταθερή στο $[H]^n$, για κάθε $n \in \omega$.

Ερωτήματα

Ισχύει το $\omega \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$, ή ακόμα και $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$;

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega}[\kappa]^n$.

Έτσι, το $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}$ σημαίνει ότι υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η δεδομένη $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$ είναι σταθερή στο $[H]^n$, για κάθε $n \in \omega$.

Ερωτήματα

Ισχύει το $\omega \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$, ή ακόμα και $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$;

Προκύπτει εύκολα ότι $\omega \not\longrightarrow (\omega)^{<\omega}$. Τα άλλα ερωτήματα οδηγούν άμεσα σε μεγάλους πληθαρίθμους (επόμενη διαφάνεια).

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} [\kappa]^n$.

Έτσι, το $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}$ σημαίνει ότι υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η δεδομένη $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$ είναι σταθερή στο $[H]^n$, για κάθε $n \in \omega$.

Ερωτήματα

Ισχύει το $\omega \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$, ή ακόμα και $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$;

Προκύπτει εύκολα ότι $\omega \not\longrightarrow (\omega)^{<\omega}$. Τα άλλα ερωτήματα οδηγούν άμεσα σε μεγάλους πληθαρίθμους (επόμενη διαφάνεια).

Άλλες γενικεύσεις:

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} [\kappa]^n$.

Έτσι, το $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}$ σημαίνει ότι υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η δεδομένη $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$ είναι σταθερή στο $[H]^n$, για κάθε $n \in \omega$.

Ερωτήματα

Ισχύει το $\omega \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$, ή ακόμα και $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$;

Προκύπτει εύκολα ότι $\omega \not\longrightarrow (\omega)^{<\omega}$. Τα άλλα ερωτήματα οδηγούν άμεσα σε μεγάλους πληθαρίθμους (επόμενη διαφάνεια).

Άλλες γενικεύσεις:

- κοιτάμε τον διατακτικό τύπο, όχι το μέγεθος, του μονοχρωματικού συνόλου (δηλ., το λ είναι απλά οριακός διατακτικός)

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} [\kappa]^n$.

Έτσι, το $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}$ σημαίνει ότι υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η δεδομένη $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$ είναι σταθερή στο $[H]^n$, για κάθε $n \in \omega$.

Ερωτήματα

Ισχύει το $\omega \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$, ή ακόμα και $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$;

Προκύπτει εύκολα ότι $\omega \not\longrightarrow (\omega)^{<\omega}$. Τα άλλα ερωτήματα οδηγούν άμεσα σε μεγάλους πληθαρίθμους (επόμενη διαφάνεια).

Άλλες γενικεύσεις:

- κοιτάμε τον διατακτικό τύπο, όχι το μέγεθος, του μονοχρωματικού συνόλου (δηλ., το λ είναι απλά οριακός διατακτικός)
- κοιτάμε δύο πιθανούς τύπους μονοχρωματικού συνόλου: $\kappa \longrightarrow (\alpha, \beta)^2$

Άπειρη θεωρία Ramsey (III)

Υπενθύμιση: Αν κ πληθάριθμος, τότε $[\kappa]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} [\kappa]^n$.

Έτσι, το $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}$ σημαίνει ότι υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \lambda$ τέτοιο ώστε η δεδομένη $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$ είναι σταθερή στο $[H]^n$, για κάθε $n \in \omega$.

Ερωτήματα

Ισχύει το $\omega \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$; Αν όχι, υπάρχει $\kappa > \omega$ τέτοιο ώστε $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$, ή ακόμα και $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$;

Προκύπτει εύκολα ότι $\omega \not\longrightarrow (\omega)^{<\omega}$. Τα άλλα ερωτήματα οδηγούν άμεσα σε μεγάλους πληθαρίθμους (επόμενη διαφάνεια).

Άλλες γενικεύσεις:

- κοιτάμε τον διατακτικό τύπο, όχι το μέγεθος, του μονοχρωματικού συνόλου (δηλ., το λ είναι απλά οριακός διατακτικός)
- κοιτάμε δύο πιθανούς τύπους μονοχρωματικού συνόλου: $\kappa \longrightarrow (\alpha, \beta)^2$

Διάφορα αποτελέσματα από Erdös, Dushnik, Miller, Specker κ.α., καθώς και τρέχουσα έρευνα σε αριθμήσιμους διατακτικούς.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Προφανώς κάθε Ramsey (αλλά όχι ο ω-Erdös) πληθάριθμος είναι επίσης weakly compact.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Προφανώς κάθε Ramsey (αλλά όχι ο ω-Erdös) πληθάριθμος είναι επίσης weakly compact. Ως προς τη σχετική τους συνέπεια, έχουμε το εξής:

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Προφανώς κάθε Ramsey (αλλά όχι ο ω-Erdös) πληθάριθμος είναι επίσης weakly compact. Ως προς τη σχετική τους συνέπεια, έχουμε το εξής:

$$\mathrm{Con}(\exists\,\text{Ramsey}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\omega\text{-Erdös}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\text{weakly compact}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\text{inaccessible}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\,.$$

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Προφανώς κάθε Ramsey (αλλά όχι ο ω-Erdös) πληθάριθμος είναι επίσης weakly compact. Ως προς τη σχετική τους συνέπεια, έχουμε το εξής:

$$\mathrm{Con}(\exists\,\mathrm{Ramsey}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\omega\text{-Erdös}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\text{weakly compact}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\text{inaccessible}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\,.$$

Εκτός των Ramsey, όλοι αυτοί οι πληθάριθμοι είναι συμβατοί με το $V = L$.

Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:

Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:

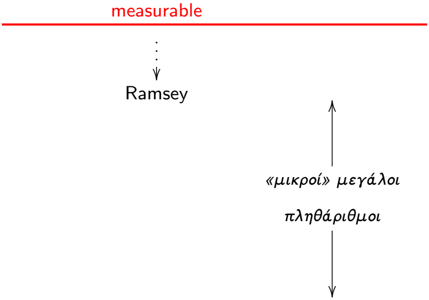
measurable

«μικροί» μεγάλοι

πληθάριθμοι

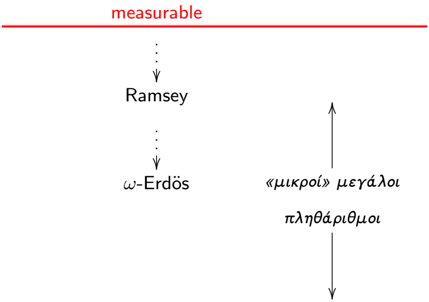
Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:

measurable

Ramsey

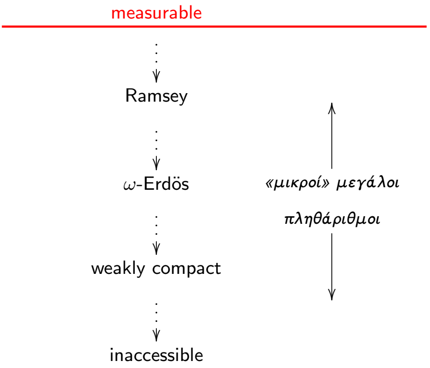
ω-Erdös

weakly compact

«μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι

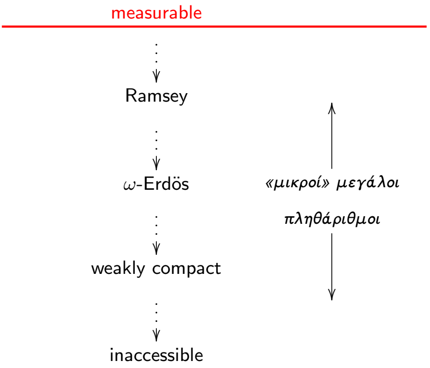
Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

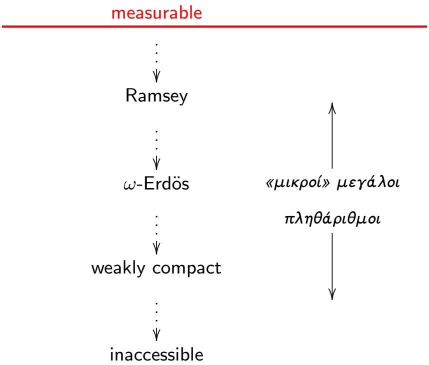
Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



Ως «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι λογίζονται όλοι εκείνοι που είναι από measurable και πάνω.

Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

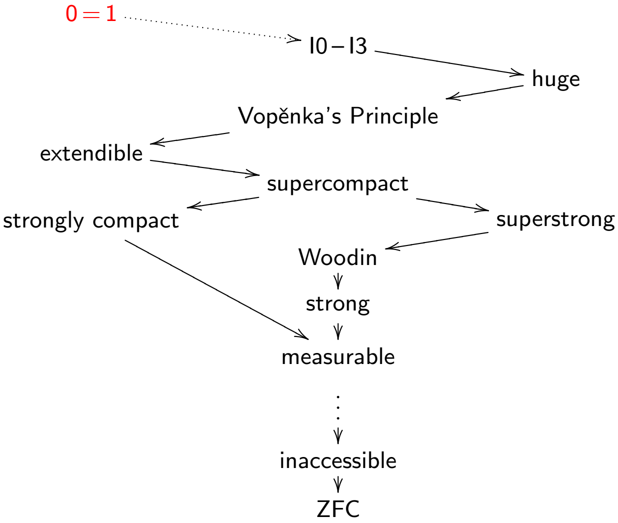
Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



Ως «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι λογίζονται όλοι εκείνοι που είναι από measurable και πάνω.

Οι «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι δεν είναι συμβατοί με το αξίωμα $V = L$.

Το διάγραμμα των μεγάλων πληθαρίθμων



Στοιχειώδεις εμφυτεύσεις

Οι στοιχειώδεις εμφυτεύσεις μάς παρέχουν τόσο ένα ενοποιητικό πλαίσιο ορισμού και μελέτης, όσο και μία ουσιαστική σκοπιά και εποπτεία πάνω στους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους.

Στοιχειώδεις εμφυτεύσεις

Οι στοιχειώδεις εμφυτεύσεις μάς παρέχουν τόσο ένα ενοποιητικό πλαίσιο ορισμού και μελέτης, όσο και μία ουσιαστική σκοπιά και εποπτεία πάνω στους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους.

Ορισμός

Μία (γνήσια) κλάση M λέγεται **εσωτερικό μοντέλο** αν η M είναι μεταβατικό μοντέλο της ZFC με $\mathbf{ON} \subseteq M$.

Στοιχειώδεις εμφυτεύσεις

Οι στοιχειώδεις εμφυτεύσεις μάς παρέχουν τόσο ένα ενοποιητικό πλαίσιο ορισμού και μελέτης, όσο και μία ουσιαστική σκοπιά και εποπτεία πάνω στους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους.

Ορισμός

Μία (γνήσια) κλάση M λέγεται **εσωτερικό μοντέλο** αν η M είναι μεταβατικό μοντέλο της ZFC με $\mathbf{ON} \subseteq M$.

- Βασικά παραδείγματα: L και V. Αν M εσωτερικό μοντέλο, τότε $L \subseteq M$.

Στοιχειώδεις εμφυτεύσεις

Οι στοιχειώδεις εμφυτεύσεις μάς παρέχουν τόσο ένα ενοποιητικό πλαίσιο ορισμού και μελέτης, όσο και μία ουσιαστική σκοπιά και εποπτεία πάνω στους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους.

Ορισμός

Μία (γνήσια) κλάση M λέγεται **εσωτερικό μοντέλο** αν η M είναι μεταβατικό μοντέλο της ZFC με $\mathbf{ON} \subseteq M$.

- Βασικά παραδείγματα: L και V. Αν M εσωτερικό μοντέλο, τότε $L \subseteq M$.

Ορισμός

Έστω $M \subseteq V$ ένα εσωτερικό μοντέλο. Μία συνάρτηση $j : V \longrightarrow M$ λέγεται **στοιχειώδης εμφύτευση** αν, για κάθε πρωτοβάθμιο τύπο $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ (στη γλώσσα της ZFC) και για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in V$:

$$\langle V, \in \rangle \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \langle M, \in \rangle \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n)).$$

Στοιχειώδεις εμφυτεύσεις

Οι στοιχειώδεις εμφυτεύσεις μάς παρέχουν τόσο ένα ενοποιητικό πλαίσιο ορισμού και μελέτης, όσο και μία ουσιαστική σκοπιά και εποπτεία πάνω στους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους.

Ορισμός

Μία (γνήσια) κλάση M λέγεται **εσωτερικό μοντέλο** αν η M είναι μεταβατικό μοντέλο της ZFC με $\mathbf{ON} \subseteq M$.

- Βασικά παραδείγματα: L και V. Αν M εσωτερικό μοντέλο, τότε $L \subseteq M$.

Ορισμός

Έστω $M \subseteq V$ ένα εσωτερικό μοντέλο. Μία συνάρτηση $j : V \longrightarrow M$ λέγεται **στοιχειώδης εμφύτευση** αν, για κάθε πρωτοβάθμιο τύπο $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ (στη γλώσσα της ZFC) και για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in V$:

$$\langle V, \in \rangle \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \langle M, \in \rangle \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n)).$$

Στην παρούσα διάλεξη, εστιάζουμε στις *ορίσιμες* στοιχειώδεις εμφυτεύσεις.

Στοιχειώδεις εμφυτεύσεις

Οι στοιχειώδεις εμφυτεύσεις μάς παρέχουν τόσο ένα ενοποιητικό πλαίσιο ορισμού και μελέτης, όσο και μία ουσιαστική σκοπιά και εποπτεία πάνω στους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους.

Ορισμός

Μία (γνήσια) κλάση M λέγεται **εσωτερικό μοντέλο** αν η M είναι μεταβατικό μοντέλο της ZFC με $\mathbf{ON} \subseteq M$.

- Βασικά παραδείγματα: L και V. Αν M εσωτερικό μοντέλο, τότε $L \subseteq M$.

Ορισμός

Έστω $M \subseteq V$ ένα εσωτερικό μοντέλο. Μία συνάρτηση $j : V \longrightarrow M$ λέγεται **στοιχειώδης εμφύτευση** αν, για κάθε πρωτοβάθμιο τύπο $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ (στη γλώσσα της ZFC) και για κάθε $a_1, \dots, a_n \in V$:

$$\langle V, \in\rangle \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \langle M, \in\rangle \models \varphi(j(a_1), \dots, j(a_n)).$$

Στην παρούσα διάλεξη, εστιάζουμε στις *ορίσιμες* στοιχειώδεις εμφυτεύσεις. Επιπλέον, καθώς αναφερόμαστε σε *κλάσεις*, ο προηγούμενος ορισμός είναι στην πραγματικότητα (αριθμήσιμο) *σχήμα*.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in$ **ON** τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathsf{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in$ **ON** τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Γιατί;

Αφού $j \neq \mathrm{id}$, υπάρχει σύνολο $x \in V$ ελάχιστης τάξης $\kappa = \mathrm{rank}(x)$ τέτοιο ώστε $x \neq j(x)$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in$ **ON** τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Γιατί;

Αφού $j \neq \mathrm{id}$, υπάρχει σύνολο $x \in V$ ελάχιστης τάξης $\kappa = \mathrm{rank}(x)$ τέτοιο ώστε $x \neq j(x)$. Επειδή κάθε $y \in x$ έχει $\mathrm{rank}(y) < \kappa$, έχουμε ότι $y = j(y)$ για τέτοια y, και άρα $x \subseteq j(x)$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Γιατί;

Αφού $j \neq \mathrm{id}$, υπάρχει σύνολο $x \in V$ ελάχιστης τάξης $\kappa = \mathrm{rank}(x)$ τέτοιο ώστε $x \neq j(x)$. Επειδή κάθε $y \in x$ έχει $\mathrm{rank}(y) < \kappa$, έχουμε ότι $y = j(y)$ για τέτοια y, και άρα $x \subseteq j(x)$. Έστω $z \in j(x) \setminus x$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Γιατί;

Αφού $j \neq \mathrm{id}$, υπάρχει σύνολο $x \in V$ ελάχιστης τάξης $\kappa = \mathrm{rank}(x)$ τέτοιο ώστε $x \neq j(x)$. Επειδή κάθε $y \in x$ έχει $\mathrm{rank}(y) < \kappa$, έχουμε ότι $y = j(y)$ για τέτοια y, και άρα $x \subseteq j(x)$. Έστω $z \in j(x) \setminus x$. Τότε, πρέπει να ισχύει ότι $\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z)$ (αλλιώς, $z = j(z) \in j(x)$ και άρα $z \in x$, που είναι άτοπο).

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Γιατί;

Αφού $j \neq \mathrm{id}$, υπάρχει σύνολο $x \in V$ ελάχιστης τάξης $\kappa = \mathrm{rank}(x)$ τέτοιο ώστε $x \neq j(x)$. Επειδή κάθε $y \in x$ έχει $\mathrm{rank}(y) < \kappa$, έχουμε ότι $y = j(y)$ για τέτοια y, και άρα $x \subseteq j(x)$. Έστω $z \in j(x) \setminus x$. Τότε, πρέπει να ισχύει ότι $\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z)$ (αλλιώς, $z = j(z) \in j(x)$ και άρα $z \in x$, που είναι άτοπο). Επομένως:

$$\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(j(x)) = j(\kappa).$$

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Γιατί;

Αφού $j \neq \mathrm{id}$, υπάρχει σύνολο $x \in V$ ελάχιστης τάξης $\kappa = \mathrm{rank}(x)$ τέτοιο ώστε $x \neq j(x)$. Επειδή κάθε $y \in x$ έχει $\mathrm{rank}(y) < \kappa$, έχουμε ότι $y = j(y)$ για τέτοια y, και άρα $x \subseteq j(x)$. Έστω $z \in j(x) \setminus x$. Τότε, πρέπει να ισχύει ότι $\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z)$ (αλλιώς, $z = j(z) \in j(x)$ και άρα $z \in x$, που είναι άτοπο). Επομένως:

$$\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(j(x)) = j(\kappa).$$

Για να δούμε ότι ο κ είναι πληθάριθμος, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha < \kappa$ και μία συνάρτηση $f : \alpha \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \kappa$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Γιατί;

Αφού $j \neq \mathrm{id}$, υπάρχει σύνολο $x \in V$ ελάχιστης τάξης $\kappa = \mathrm{rank}(x)$ τέτοιο ώστε $x \neq j(x)$. Επειδή κάθε $y \in x$ έχει $\mathrm{rank}(y) < \kappa$, έχουμε ότι $y = j(y)$ για τέτοια y, και άρα $x \subseteq j(x)$. Έστω $z \in j(x) \setminus x$. Τότε, πρέπει να ισχύει ότι $\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z)$ (αλλιώς, $z = j(z) \in j(x)$ και άρα $z \in x$, που είναι άτοπο). Επομένως:

$$\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(j(x)) = j(\kappa).$$

Για να δούμε ότι ο κ είναι πληθάριθμος, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha < \kappa$ και μία συνάρτηση $f : \alpha \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \kappa$. Τότε, αφού η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι $j(f) : \alpha \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} j(\kappa)$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Γιατί;

Αφού $j \neq \mathrm{id}$, υπάρχει σύνολο $x \in V$ ελάχιστης τάξης $\kappa = \mathrm{rank}(x)$ τέτοιο ώστε $x \neq j(x)$. Επειδή κάθε $y \in x$ έχει $\mathrm{rank}(y) < \kappa$, έχουμε ότι $y = j(y)$ για τέτοια y, και άρα $x \subseteq j(x)$. Έστω $z \in j(x) \setminus x$. Τότε, πρέπει να ισχύει ότι $\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z)$ (αλλιώς, $z = j(z) \in j(x)$ και άρα $z \in x$, που είναι άτοπο). Επομένως:

$$\kappa \leqslant \mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(j(x)) = j(\kappa).$$

Για να δούμε ότι ο κ είναι πληθάριθμος, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha < \kappa$ και μία συνάρτηση $f : \alpha \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \kappa$. Τότε, αφού η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι $j(f) : \alpha \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} j(\kappa)$. Αλλά αυτό είναι αδύνατο αφού, για κάθε $\beta < \alpha$, έχουμε ότι:

$$f(\beta) = j(f(\beta)) = j(f)(j(\beta)) = j(f)(\beta).$$

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Αυτόν τον πληθάριθμο κ τον ονομάζουμε **κρίσιμο σημείο** (**critical point**) της εμφύτευσης j και τον συμβολίζουμε με $\mathrm{cp}(j)$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Αυτόν τον πληθάριθμο κ τον ονομάζουμε **κρίσιμο σημείο** (**critical point**) της εμφύτευσης j και τον συμβολίζουμε με $\mathrm{cp}(j)$.

Γενικός τρόπος ορισμού μεγάλων πληθαρίθμων

Ένας πληθάριθμος κ είναι **μεγάλος πληθάριθμος** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ τέτοια ώστε $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

Αυτόν τον πληθάριθμο κ τον ονομάζουμε **κρίσιμο σημείο** (**critical point**) της εμφύτευσης j και τον συμβολίζουμε με $\mathrm{cp}(j)$.

Γενικός τρόπος ορισμού μεγάλων πληθαρίθμων

Ένας πληθάριθμος κ είναι **μεγάλος πληθάριθμος** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ τέτοια ώστε $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

- Απαιτώντας, επιπλέον, το M να είναι όσο πιο «κοντά» γίνεται στο V, οδηγούμαστε σε μία ιεραρχία ολοένα και ισχυρότερων (ως προς τη συνέπεια) αξιωμάτων μεγάλων πληθαρίθμων.

Ορισμοί μέσω εμφυτεύσεων

Θεωρούμε μόνο τη μη τετριμμένη περίπτωση $j \neq \mathrm{id}$.

Τότε, υπάρχει ελάχιστος $\kappa \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε $j(\kappa) \neq \kappa$. Ειδικότερα, ισχύει ότι $j(\kappa) > \kappa$ και ο κ είναι πληθάριθμος (και μάλιστα inaccessible).

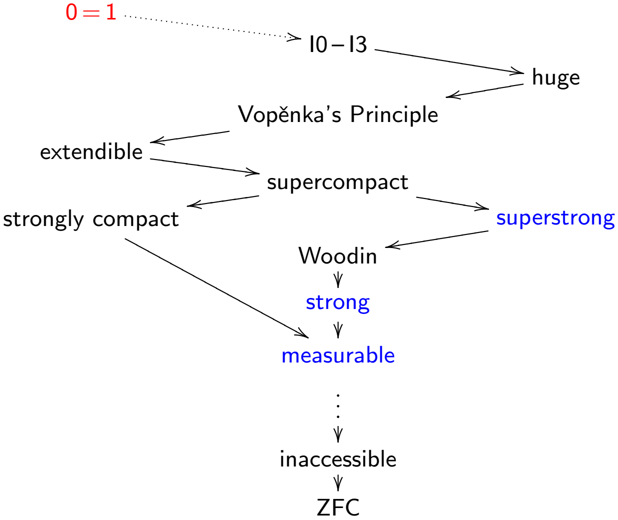
Αυτόν τον πληθάριθμο κ τον ονομάζουμε **κρίσιμο σημείο** (**critical point**) της εμφύτευσης j και τον συμβολίζουμε με $\mathrm{cp}(j)$.

Γενικός τρόπος ορισμού μεγάλων πληθαρίθμων

Ένας πληθάριθμος κ είναι **μεγάλος πληθάριθμος** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ τέτοια ώστε $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

- Απαιτώντας, επιπλέον, το M να είναι όσο πιο «κοντά» γίνεται στο V, οδηγούμαστε σε μία ιεραρχία ολοένα και ισχυρότερων (ως προς τη συνέπεια) αξιωμάτων μεγάλων πληθαρίθμων.
- Η απλούστερη περίπτωση είναι όταν καμία απαίτηση δεν υπάρχει για το M: αυτή είναι η περίπτωση των measurable πληθαρίθμων.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)



Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (Ι)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$.

Γιατί;

Μία εύκολη επαγωγή δείχνει ότι η j είναι η ταυτοτική στο V_α, για κάθε $\alpha < \kappa$. Δηλαδή, $j \upharpoonright V_\kappa = \mathrm{id}$ και άρα $V_\kappa \subseteq M$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$.

Γιατί;

Μία εύκολη επαγωγή δείχνει ότι η j είναι η ταυτοτική στο V_α, για κάθε $\alpha < \kappa$. Δηλαδή, $j \restriction V_\kappa = \mathrm{id}$ και άρα $V_\kappa \subseteq M$. Επιπλέον, για να δούμε ότι $V_{\kappa+1} \subseteq M$, θεωρούμε τυχόν $A \subseteq V_\kappa$ και παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in V_\kappa$, το $x \in A$ αν και μόνο αν $x = j(x) \in j(A)$·

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$.

Γιατί;

Μία εύκολη επαγωγή δείχνει ότι η j είναι η ταυτοτική στο V_α, για κάθε $\alpha < \kappa$. Δηλαδή, $j \restriction V_\kappa = \mathrm{id}$ και άρα $V_\kappa \subseteq M$. Επιπλέον, για να δούμε ότι $V_{\kappa+1} \subseteq M$, θεωρούμε τυχόν $A \subseteq V_\kappa$ και παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in V_\kappa$, το $x \in A$ αν και μόνο αν $x = j(x) \in j(A)$· με άλλα λόγια, $A = j(A) \cap V_\kappa$ και άρα $A \in M$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$. Συνήθως, ισχύει και ${}^{\kappa}M \subseteq M$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$. Συνήθως, ισχύει και ${}^{\kappa}M \subseteq M$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**strong**, για κάποιο δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$, και $V_\lambda \subseteq M$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (Ι)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$. Συνήθως, ισχύει και ${}^{\kappa}M \subseteq M$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**strong**, για κάποιο δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$, και $V_\lambda \subseteq M$. Ο πληθάριθμος κ λέγεται **strong** αν είναι λ-strong για κάθε $\lambda \geqslant \kappa$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$. Συνήθως, ισχύει και ${}^{\kappa}M \subseteq M$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**strong**, για κάποιο δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$, και $V_\lambda \subseteq M$. Ο πληθάριθμος κ λέγεται **strong** αν είναι λ-strong για κάθε $\lambda \geqslant \kappa$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **superstrong** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και $V_{j(\kappa)} \subseteq M$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (I)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **measurable** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Ισχύει πάντα πως $V_{\kappa+1} \subseteq M$. Συνήθως, ισχύει και ${}^{\kappa}M \subseteq M$.

Ορισμός

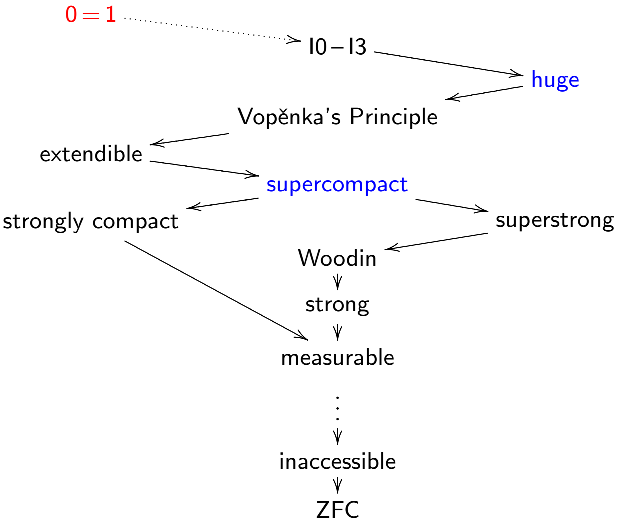
Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**strong**, για κάποιο δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$, και $V_\lambda \subseteq M$.
Ο πληθάριθμος κ λέγεται **strong** αν είναι λ-strong για κάθε $\lambda \geqslant \kappa$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **superstrong** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και $V_{j(\kappa)} \subseteq M$.

Παρατηρήστε ότι η απαίτηση «κλειστότητας» του M ολοένα αυξάνει.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (II)



Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (II)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**supercompact**, για δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ και ${}^{\lambda}M \subseteq M$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (II)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**supercompact**, για δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ και ${}^{\lambda}M \subseteq M$.
Ο κ λέγεται **supercompact** αν είναι λ-supercompact για κάθε $\lambda \geqslant \kappa$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (II)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**supercompact**, για δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ και ${}^{\lambda}M \subseteq M$. Ο κ λέγεται **supercompact** αν είναι λ-supercompact για κάθε $\lambda \geqslant \kappa$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **huge** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$.

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (II)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**supercompact**, για δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ και ${}^{\lambda}M \subseteq M$.
Ο κ λέγεται **supercompact** αν είναι λ-supercompact για κάθε $\lambda \geqslant \kappa$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **huge** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$.

Ερώτημα

Πόσο ακόμα πιο «κοντά» στο V γίνεται να είναι το M;

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (II)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**supercompact**, για δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ και ${}^{\lambda}M \subseteq M$.
Ο κ λέγεται **supercompact** αν είναι λ-supercompact για κάθε $\lambda \geqslant \kappa$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **huge** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$.

Ερώτημα

Πόσο ακόμα πιο «κοντά» στο V γίνεται να είναι το M;

Ειδικότερα, είναι δυνατόν να έχουμε την «απόλυτη κλειστότητα» $M = V$;

Παραδείγματα μεγάλων πληθαρίθμων (II)

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται λ-**supercompact**, για δεδομένο $\lambda \geqslant \kappa$, αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \lambda$ και ${}^{\lambda}M \subseteq M$. Ο κ λέγεται **supercompact** αν είναι λ-supercompact για κάθε $\lambda \geqslant \kappa$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **huge** αν υπάρχει μία στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$.

Ερώτημα

Πόσο ακόμα πιο «κοντά» στο V γίνεται να είναι το M;

Ειδικότερα, είναι δυνατόν να έχουμε την «απόλυτη κλειστότητα» $M = V$;

Ο Reinhardt ($\sim$1967) θεώρησε την έννοια μεγάλου πληθαρίθμου ο οποίος είναι κρίσιμο σημείο (μη τετριμμένης) εμφύτευσης της μορφής $j : V \longrightarrow V$.

Περιορισμοί και τα πλέον ισχυρά αξιώματα

Θεώρημα (Kunen, 1971)

Δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow V$.

Περιορισμοί και τα πλέον ισχυρά αξιώματα

Θεώρημα (Kunen, 1971)

Δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow V$.

- Η απόδειξη χρησιμοποιεί ουσιωδώς το AC. Το κατά πόσον το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί στη ZF είναι ένα από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα της σύγχρονης θεωρίας συνόλων.

Περιορισμοί και τα πλέον ισχυρά αξιώματα

Θεώρημα (Kunen, 1971)

Δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow V$.

- Η απόδειξη χρησιμοποιεί ουσιωδώς το AC. Το κατά πόσον το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί στη ZF είναι ένα από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα της σύγχρονης θεωρίας συνόλων.
- Ειδικότερα, ο Kunen έδειξε πως δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V_{\lambda+2} \longrightarrow V_{\lambda+2}$, για οποιοδήποτε λ.

Περιορισμοί και τα πλέον ισχυρά αξιώματα

Θεώρημα (Kunen, 1971)

Δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow V$.

- Η απόδειξη χρησιμοποιεί ουσιωδώς το AC. Το κατά πόσον το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί στη ZF είναι ένα από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα της σύγχρονης θεωρίας συνόλων.
- Ειδικότερα, ο Kunen έδειξε πως δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V_{\lambda+2} \longrightarrow V_{\lambda+2}$, για οποιοδήποτε λ.

Ελάχιστα μακριά από αυτό το φράγμα ασυνέπειας του Kunen βρίσκονται οι λεγόμενοι rank-into-rank πληθάριθμοι, τα πλέον ισχυρά αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων που δεν αντιβαίνουν (από ό,τι γνωρίζουμε) στο AC.

Περιορισμοί και τα πλέον ισχυρά αξιώματα

Θεώρημα (Kunen, 1971)

Δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow V$.

- Η απόδειξη χρησιμοποιεί ουσιωδώς το AC. Το κατά πόσον το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί στη ZF είναι ένα από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα της σύγχρονης θεωρίας συνόλων.
- Ειδικότερα, ο Kunen έδειξε πως δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V_{\lambda+2} \longrightarrow V_{\lambda+2}$, για οποιοδήποτε λ.

Ελάχιστα μακριά από αυτό το φράγμα ασυνέπειας του Kunen βρίσκονται οι λεγόμενοι rank-into-rank πληθάριθμοι, τα πλέον ισχυρά αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων που δεν αντιβαίνουν (από ό,τι γνωρίζουμε) στο AC.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **I3** αν, για κάποιο $\lambda > \kappa$, υπάρχει στοιχειώδης εμφύτευση $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Περιορισμοί και τα πλέον ισχυρά αξιώματα

Θεώρημα (Kunen, 1971)

Δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow V$.

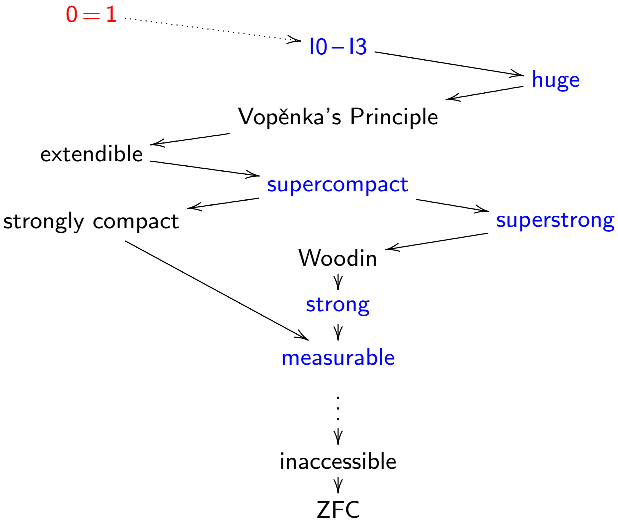
- Η απόδειξη χρησιμοποιεί ουσιωδώς το AC. Το κατά πόσον το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί στη ZF είναι ένα από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα της σύγχρονης θεωρίας συνόλων.
- Ειδικότερα, ο Kunen έδειξε πως δεν υπάρχει (μη τετριμμένη) στοιχειώδης εμφύτευση $j : V_{\lambda+2} \longrightarrow V_{\lambda+2}$, για οποιοδήποτε λ.

Ελάχιστα μακριά από αυτό το φράγμα ασυνέπειας του Kunen βρίσκονται οι λεγόμενοι rank-into-rank πληθάριθμοι, τα πλέον ισχυρά αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων που δεν αντιβαίνουν (από ό,τι γνωρίζουμε) στο AC.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **I1** αν, για κάποιο $\lambda > \kappa$, υπάρχει στοιχειώδης εμφύτευση $j : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Το διάγραμμα, ξανά



Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (Ι)

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (I)

Ορισμός

Έστω $S \neq \varnothing$. Ένα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ λέγεται **υπερφίλτρο** στο S αν:

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (I)

Ορισμός

Έστω $S \neq \varnothing$. Ένα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ λέγεται **υπερφίλτρο** στο S αν:

1. $S \in \mathcal{U}$ και $\varnothing \notin \mathcal{U}$.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (I)

Ορισμός

Έστω $S \neq \varnothing$. Ένα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ λέγεται **υπερφίλτρο** στο S αν:

1. $S \in \mathcal{U}$ και $\varnothing \notin \mathcal{U}$.
2. Αν $A, B \in \mathcal{U}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{U}$.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (I)

Ορισμός

Έστω $S \neq \varnothing$. Ένα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ λέγεται **υπερφίλτρο** στο S αν:

1. $S \in \mathcal{U}$ και $\varnothing \notin \mathcal{U}$.
2. Αν $A, B \in \mathcal{U}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{U}$.
3. Αν $A \in \mathcal{U}$ και $A \subseteq B \subseteq S$, τότε $B \in \mathcal{U}$.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (Ι)

Ορισμός

Έστω $S \neq \varnothing$. Ένα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ λέγεται **υπερφίλτρο** στο S αν:

1. $S \in \mathcal{U}$ και $\varnothing \notin \mathcal{U}$.
2. Αν $A, B \in \mathcal{U}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{U}$.
3. Αν $A \in \mathcal{U}$ και $A \subseteq B \subseteq S$, τότε $B \in \mathcal{U}$.
4. Για κάθε $A \subseteq S$, είτε $A \in \mathcal{U}$ ή $S \setminus A \in \mathcal{U}$.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (Ι)

Ορισμός

Έστω $S \neq \varnothing$. Ένα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ λέγεται **υπερφίλτρο** στο S αν:

1. $S \in \mathcal{U}$ και $\varnothing \notin \mathcal{U}$.
2. Αν $A, B \in \mathcal{U}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{U}$.
3. Αν $A \in \mathcal{U}$ και $A \subseteq B \subseteq S$, τότε $B \in \mathcal{U}$.
4. Για κάθε $A \subseteq S$, είτε $A \in \mathcal{U}$ ή $S \backslash A \in \mathcal{U}$.

Ορισμός

Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο S λέγεται **τετριμμένο** αν υπάρχει $a \in S$ τέτοιο ώστε $\mathcal{U} = \{X \subseteq S : a \in X\}$.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (I)

Ορισμός

Έστω $S \neq \varnothing$. Ένα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ λέγεται **υπερφίλτρο** στο S αν:

1. $S \in \mathcal{U}$ και $\varnothing \notin \mathcal{U}$.
2. Αν $A, B \in \mathcal{U}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{U}$.
3. Αν $A \in \mathcal{U}$ και $A \subseteq B \subseteq S$, τότε $B \in \mathcal{U}$.
4. Για κάθε $A \subseteq S$, είτε $A \in \mathcal{U}$ ή $S \backslash A \in \mathcal{U}$.

Ορισμός

Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο S λέγεται **τετριμμένο** αν υπάρχει $a \in S$ τέτοιο ώστε $\mathcal{U} = \{X \subseteq S : a \in X\}$.

Ορισμός

Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο S λέγεται κ-**πλήρες**, για κάποιον (κανονικό) κ, αν για κάθε $\mathcal{A} = \{A_i : i < \lambda\} \subseteq \mathcal{U}$ με $\lambda < \kappa$, έχουμε ότι $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{U}$.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (II)

Θεώρημα (Keisler – Scott, ∼1960)

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι measurable αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη τετριμμένο κ-πλήρες υπερφίλτρο στο κ.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (II)

Θεώρημα (Keisler – Scott, $\sim$1960)

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι measurable αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη τετριμμένο κ-πλήρες υπερφίλτρο στο κ.

Ανάλογοι χαρακτηρισμοί, είτε μέσω κατάλληλων υπερφίλτρων ή μέσω συστημάτων αυτών, είναι διαθέσιμοι και για τους υπόλοιπους μεγάλους πληθαρίθμους.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (II)

Θεώρημα (Keisler – Scott, $\sim$1960)

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι measurable αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη τετριμμένο κ-πλήρες υπερφίλτρο στο κ.

Ανάλογοι χαρακτηρισμοί, είτε μέσω κατάλληλων υπερφίλτρων ή μέσω συστημάτων αυτών, είναι διαθέσιμοι και για τους υπόλοιπους μεγάλους πληθαρίθμους.

Με αυτόν τον τρόπο, οι μεγάλοι πληθάριθμοι γίνονται *εκφράσιμοι* στη γλώσσα της ZFC.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (II)

Θεώρημα (Keisler – Scott, $\sim$1960)

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι measurable αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη τετριμμένο κ-πλήρες υπερφίλτρο στο κ.

Ανάλογοι χαρακτηρισμοί, είτε μέσω κατάλληλων υπερφίλτρων ή μέσω συστημάτων αυτών, είναι διαθέσιμοι και για τους υπόλοιπους μεγάλους πληθαρίθμους.

Με αυτόν τον τρόπο, οι μεγάλοι πληθάριθμοι γίνονται *εκφράσιμοι* στη γλώσσα της ZFC.

Όμως, η σκοπιά των εμφυτεύσεων προτιμάται σε πολλές αποδείξεις αλλά και στη γενικότερη μελέτη αυτών των εννοιών, καθώς αποκαλύπτει την ευρεία «ανακλαστική» ισχύ που έχουν οι μεγάλοι πληθάριθμοι.

Συνδυαστικοί χαρακτηρισμοί (ΙΙ)

Θεώρημα (Keisler – Scott, $\sim$1960)

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι measurable αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη τετριμμένο κ-πλήρες υπερφίλτρο στο κ.

Ανάλογοι χαρακτηρισμοί, είτε μέσω κατάλληλων υπερφίλτρων ή μέσω συστημάτων αυτών, είναι διαθέσιμοι και για τους υπόλοιπους μεγάλους πληθαρίθμους.

Με αυτόν τον τρόπο, οι μεγάλοι πληθάριθμοι γίνονται *εκφράσιμοι* στη γλώσσα της ZFC.

Όμως, η σκοπιά των εμφυτεύσεων προτιμάται σε πολλές αποδείξεις αλλά και στη γενικότερη μελέτη αυτών των εννοιών, καθώς αποκαλύπτει την ευρεία «ανακλαστική» ισχύ που έχουν οι μεγάλοι πληθάριθμοι.

Μάλιστα, μέσω αυτών των «ανακλαστικών» ιδιοτήτων τους, πολλοί μεγάλοι πληθάριθμοι βρίσκουν εφαρμογές σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:
$$\{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (Ι)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$\{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$\{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής:

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$\{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής: για κάθε $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X)$.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (Ι)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$\{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής: για κάθε $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X)$. Ελέγχεται εύκολα (αφού $\mathrm{cp}(j) = \kappa$) πως το $\mathcal{U}$ είναι (μη τετριμμένο, κ-πλήρες) υπερφίλτρο στο κ.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$\{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής: για κάθε $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X)$. Ελέγχεται εύκολα (αφού $\mathrm{cp}(j) = \kappa$) πως το $\mathcal{U}$ είναι (μη τετριμμένο, κ-πλήρες) υπερφίλτρο στο κ.

Για το ζητούμενο, είναι αρκετό να δείξουμε ότι $M \models$ «ο κ είναι inaccessible».

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$X = \{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής: για κάθε $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X)$. Ελέγχεται εύκολα (αφού $\mathrm{cp}(j) = \kappa$) πως το $\mathcal{U}$ είναι (μη τετριμμένο, κ-πλήρες) υπερφίλτρο στο κ.

Για το ζητούμενο, είναι αρκετό να δείξουμε ότι $M \models$ «ο κ είναι inaccessible».

Αυτό διότι, από ορισμό του $\mathcal{U}$, έχουμε ότι:

$$X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) : M \models \text{«ο } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\}.$$

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$X = \{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής: για κάθε $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X)$. Ελέγχεται εύκολα (αφού $\mathrm{cp}(j) = \kappa$) πως το $\mathcal{U}$ είναι (μη τετριμμένο, κ-πλήρες) υπερφίλτρο στο κ.

Για το ζητούμενο, είναι αρκετό να δείξουμε ότι $M \models$ «ο κ είναι inaccessible».

Αυτό διότι, από ορισμό του $\mathcal{U}$, έχουμε ότι:

$$X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) : M \models \text{«ο } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\}.$$

Έχουμε ήδη σημειώσει ότι $j \restriction V_\kappa = \mathrm{id}$ (με επαγωγή στο κ) και ότι $V_{\kappa+1} \subseteq M$, δηλ., $V_{\kappa+1} = V^M_{\kappa+1}$.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$X = \{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής: για κάθε $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X)$. Ελέγχεται εύκολα (αφού $\mathrm{cp}(j) = \kappa$) πως το $\mathcal{U}$ είναι (μη τετριμμένο, κ-πλήρες) υπερφίλτρο στο κ.

Για το ζητούμενο, είναι αρκετό να δείξουμε ότι $M \models$ «ο κ είναι inaccessible».

Αυτό διότι, από ορισμό του $\mathcal{U}$, έχουμε ότι:

$$X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) : M \models \text{«ο } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\}.$$

Έχουμε ήδη σημειώσει ότι $j \upharpoonright V_\kappa = \mathrm{id}$ (με επαγωγή στο κ) και ότι $V_{\kappa+1} \subseteq M$, δηλ., $V_{\kappa+1} = V^M_{\kappa+1}$. Επίσης, ο κ είναι inaccessible στο V.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$X = \{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής: για κάθε $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X)$. Ελέγχεται εύκολα (αφού $\mathrm{cp}(j) = \kappa$) πως το $\mathcal{U}$ είναι (μη τετριμμένο, κ-πλήρες) υπερφίλτρο στο κ.

Για το ζητούμενο, είναι αρκετό να δείξουμε ότι $M \models$ «ο κ είναι inaccessible».

Αυτό διότι, από ορισμό του $\mathcal{U}$, έχουμε ότι:

$$X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) : M \models \text{«ο } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\}.$$

Έχουμε ήδη σημειώσει ότι $j \upharpoonright V_\kappa = \mathrm{id}$ (με επαγωγή στο κ) και ότι $V_{\kappa+1} \subseteq M$, δηλ., $V_{\kappa+1} = V^M_{\kappa+1}$. Επίσης, ο κ είναι inaccessible στο V. Προκύπτει άμεσα πως ο κ είναι inaccessible και στο M, αφού αυτό «ελέγχεται τοπικά» στο $V_{\kappa+1}$. □

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (I)

Πρόταση

Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο κ τέτοιο ώστε:

$$X = \{\alpha < \kappa : \text{«ο πληθάριθμος } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in \mathcal{U}.$$

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ ως εξής: για κάθε $X \subseteq \kappa$, $X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X)$. Ελέγχεται εύκολα (αφού $\mathrm{cp}(j) = \kappa$) πως το $\mathcal{U}$ είναι (μη τετριμμένο, κ-πλήρες) υπερφίλτρο στο κ.

Για το ζητούμενο, είναι αρκετό να δείξουμε ότι $M \models$ «ο κ είναι inaccessible».

Αυτό διότι, από ορισμό του $\mathcal{U}$, έχουμε ότι:

$$X \in \mathcal{U} \iff \kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) : M \models \text{«ο } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\}.$$

Έχουμε ήδη σημειώσει ότι $j \restriction V_\kappa = \mathrm{id}$ (με επαγωγή στο κ) και ότι $V_{\kappa+1} \subseteq M$, δηλ., $V_{\kappa+1} = V^M_{\kappa+1}$. Επίσης, ο κ είναι inaccessible στο V. Προκύπτει άμεσα πως ο κ είναι inaccessible και στο M, αφού αυτό «ελέγχεται τοπικά» στο $V_{\kappa+1}$. □

Το μοτίβο αυτό είναι πολύ σύνηθες: αντίστοιχα αποτελέσματα ανάκλασης ισχύουν για πολλά ακόμα ζεύγη μεγάλων πληθαρίθμων.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις

Με χρήση των εμφυτεύσεων μπορούμε, ενίοτε, να αποφύγουμε τις (βαρετές και όχι πάντα διαφωτιστικές) τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίζονται σε συνδυαστικές αποδείξεις.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις

Με χρήση των εμφυτεύσεων μπορούμε, ενίοτε, να αποφύγουμε τις (βαρετές και όχι πάντα διαφωτιστικές) τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίζονται σε συνδυαστικές αποδείξεις. Υπενθύμιση:

Ορισμός

Ένας inaccessible πληθάριθμος κ είναι weakly compact αν και μόνο αν έχει την Ιδιότητα του Δέντρου (Tree Property): κάθε κ-δέντρο (δηλ., δέντρο ύψους κ τα επίπεδα του οποίου είναι όλα μεγέθους $< \kappa$) έχει ένα κλαδί μεγέθους κ.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις

Με χρήση των εμφυτεύσεων μπορούμε, ενίοτε, να αποφύγουμε τις (βαρετές και όχι πάντα διαφωτιστικές) τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίζονται σε συνδυαστικές αποδείξεις. Υπενθύμιση:

Ορισμός

Ένας inaccessible πληθάριθμος κ είναι weakly compact αν και μόνο αν έχει την Ιδιότητα του Δέντρου (Tree Property): κάθε κ-δέντρο (δηλ., δέντρο ύψους κ τα επίπεδα του οποίου είναι όλα μεγέθους $< \kappa$) έχει ένα κλαδί μεγέθους κ.

Θεώρημα

Αν ο πληθάριθμος κ είναι measurable, τότε ο κ είναι weakly compact.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις

Με χρήση των εμφυτεύσεων μπορούμε, ενίοτε, να αποφύγουμε τις (βαρετές και όχι πάντα διαφωτιστικές) τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίζονται σε συνδυαστικές αποδείξεις. Υπενθύμιση:

Ορισμός

Ένας inaccessible πληθάριθμος κ είναι weakly compact αν και μόνο αν έχει την Ιδιότητα του Δέντρου (Tree Property): κάθε κ-δέντρο (δηλ., δέντρο ύψους κ τα επίπεδα του οποίου είναι όλα μεγέθους $< \kappa$) έχει ένα κλαδί μεγέθους κ.

Θεώρημα

Αν ο πληθάριθμος κ είναι measurable, τότε ο κ είναι weakly compact.

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και έστω T δεδομένο κ-δέντρο.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις

Με χρήση των εμφυτεύσεων μπορούμε, ενίοτε, να αποφύγουμε τις (βαρετές και όχι πάντα διαφωτιστικές) τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίζονται σε συνδυαστικές αποδείξεις. Υπενθύμιση:

Ορισμός

Ένας inaccessible πληθάριθμος κ είναι weakly compact αν και μόνο αν έχει την Ιδιότητα του Δέντρου (Tree Property): κάθε κ-δέντρο (δηλ., δέντρο ύψους κ τα επίπεδα του οποίου είναι όλα μεγέθους $< \kappa$) έχει ένα κλαδί μεγέθους κ.

Θεώρημα

Αν ο πληθάριθμος κ είναι measurable, τότε ο κ είναι weakly compact.

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και έστω T δεδομένο κ-δέντρο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $T \subseteq {}^{<\kappa}\kappa \subseteq V_\kappa$ και ότι το T έχει κλαδευτεί σωστά.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις

Με χρήση των εμφυτεύσεων μπορούμε, ενίοτε, να αποφύγουμε τις (βαρετές και όχι πάντα διαφωτιστικές) τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίζονται σε συνδυαστικές αποδείξεις. Υπενθύμιση:

Ορισμός

Ένας inaccessible πληθάριθμος κ είναι weakly compact αν και μόνο αν έχει την Ιδιότητα του Δέντρου (Tree Property): κάθε κ-δέντρο (δηλ., δέντρο ύψους κ τα επίπεδα του οποίου είναι όλα μεγέθους $< \kappa$) έχει ένα κλαδί μεγέθους κ.

Θεώρημα

Αν ο πληθάριθμος κ είναι measurable, τότε ο κ είναι weakly compact.

Επεξήγηση

Ένα κ-δέντρο T έχει κλαδευτεί σωστά αν έχει μοναδική ρίζα και, για κάθε $x \in T$ και κάθε επόμενο επίπεδο $\mathrm{height}(x, T) < \alpha < \kappa$, υπάρχει ένα $y \in T$ με $y \in \mathrm{Level}_\alpha(T)$ τέτοιο ώστε $x <_T y$.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις

Με χρήση των εμφυτεύσεων μπορούμε, ενίοτε, να αποφύγουμε τις (βαρετές και όχι πάντα διαφωτιστικές) τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίζονται σε συνδυαστικές αποδείξεις. Υπενθύμιση:

Ορισμός

Ένας inaccessible πληθάριθμος κ είναι weakly compact αν και μόνο αν έχει την Ιδιότητα του Δέντρου (Tree Property): κάθε κ-δέντρο (δηλ., δέντρο ύψους κ τα επίπεδα του οποίου είναι όλα μεγέθους $< \kappa$) έχει ένα κλαδί μεγέθους κ.

Θεώρημα

Αν ο πληθάριθμος κ είναι measurable, τότε ο κ είναι weakly compact.

Απόδειξη.

Έστω στοιχειώδης εμφύτευση $j : V \longrightarrow M$ με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ και έστω T δεδομένο κ-δέντρο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $T \subseteq {}^{<\kappa}\kappa \subseteq V_\kappa$ και ότι το T έχει κλαδευτεί σωστά (αφού ο κ είναι κανονικός).

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις (συνέχεια)

Απόδειξη. (συνέχεια)

Επειδή η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι το $j(T)$ είναι ένα (σωστά κλαδεμένο) $j(\kappa)$-δέντρο στο M.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις (συνέχεια)

Απόδειξη. (συνέχεια)

Επειδή η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι το $j(T)$ είναι ένα (σωστά κλαδεμένο) $j(\kappa)$-δέντρο στο M. Επιπλέον, για κάθε $\alpha < \kappa$, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\mathrm{Level}_\alpha(T) = \mathrm{Level}_\alpha(j(T)) \in V_\kappa,$$

και, επομένως, το $j(T)$ είναι, για την ακρίβεια, τελική επέκταση του T.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις (συνέχεια)

Απόδειξη. (συνέχεια)

Επειδή η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι το $j(T)$ είναι ένα (σωστά κλαδεμένο) $j(\kappa)$-δέντρο στο M. Επιπλέον, για κάθε $\alpha < \kappa$, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\mathrm{Level}_\alpha(T) = \mathrm{Level}_\alpha(j(T)) \in V_\kappa,$$

και, επομένως, το $j(T)$ είναι, για την ακρίβεια, τελική επέκταση του T.

Έστω τώρα $s \in \mathrm{Level}_\kappa(j(T))$ τυχόν στοιχείο στο κ-οστό επίπεδο του $j(T)$.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις (συνέχεια)

Απόδειξη. (συνέχεια)

Επειδή η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι το $j(T)$ είναι ένα (σωστά κλαδεμένο) $j(\kappa)$-δέντρο στο M. Επιπλέον, για κάθε $\alpha < \kappa$, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\mathrm{Level}_\alpha(T) = \mathrm{Level}_\alpha(j(T)) \in V_\kappa,$$

και, επομένως, το $j(T)$ είναι, για την ακρίβεια, τελική επέκταση του T.
Έστω τώρα $s \in \mathrm{Level}_\kappa(j(T))$ τυχόν στοιχείο στο κ-οστό επίπεδο του $j(T)$.
Θεωρούμε το (γραμμικά διατεταγμένο) σύνολο των προγόνων του:

$$b = \{t \in j(T) : t <_{j(T)} s\}.$$

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις (συνέχεια)

Απόδειξη. (συνέχεια)

Επειδή η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι το $j(T)$ είναι ένα (σωστά κλαδεμένο) $j(\kappa)$-δέντρο στο M. Επιπλέον, για κάθε $\alpha < \kappa$, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\mathrm{Level}_\alpha(T) = \mathrm{Level}_\alpha(j(T)) \in V_\kappa,$$

και, επομένως, το $j(T)$ είναι, για την ακρίβεια, τελική επέκταση του T.
Έστω τώρα $s \in \mathrm{Level}_\kappa(j(T))$ τυχόν στοιχείο στο κ-οστό επίπεδο του $j(T)$.
Θεωρούμε το (γραμμικά διατεταγμένο) σύνολο των προγόνων του:

$$b = \{t \in j(T) : t <_{j(T)} s\}.$$

Όμως, αφού κάθε $t \in b$ βρίσκεται σε επίπεδο $\alpha < \kappa$, έπεται ότι το b είναι, στην πραγματικότητα, κλαδί μεγέθους κ στο δέντρο T.

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις (συνέχεια)

Απόδειξη. (συνέχεια)

Επειδή η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι το $j(T)$ είναι ένα (σωστά κλαδεμένο) $j(\kappa)$-δέντρο στο M. Επιπλέον, για κάθε $\alpha < \kappa$, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\mathrm{Level}_\alpha(T) = \mathrm{Level}_\alpha(j(T)) \in V_\kappa,$$

και, επομένως, το $j(T)$ είναι, για την ακρίβεια, τελική επέκταση του T.
Έστω τώρα $s \in \mathrm{Level}_\kappa(j(T))$ τυχόν στοιχείο στο κ-οστό επίπεδο του $j(T)$.
Θεωρούμε το (γραμμικά διατεταγμένο) σύνολο των προγόνων του:

$$b = \{t \in j(T) : t <_{j(T)} s\}.$$

Όμως, αφού κάθε $t \in b$ βρίσκεται σε επίπεδο $\alpha < \kappa$, έπεται ότι το b είναι, στην πραγματικότητα, κλαδί μεγέθους κ στο δέντρο T.
Συμπεραίνουμε ότι ο (inaccessible) κ έχει την ιδιότητα του δέντρου και, άρα, είναι weakly compact. $\square$

Μία συμπαθέστατη απόδειξη με εμφυτεύσεις (συνέχεια)

Απόδειξη. (συνέχεια)

Επειδή η j είναι στοιχειώδης, έχουμε ότι το $j(T)$ είναι ένα (σωστά κλαδεμένο) $j(\kappa)$-δέντρο στο M. Επιπλέον, για κάθε $\alpha < \kappa$, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\mathrm{Level}_\alpha(T) = \mathrm{Level}_\alpha(j(T)) \in V_\kappa,$$

και, επομένως, το $j(T)$ είναι, για την ακρίβεια, τελική επέκταση του T.
Έστω τώρα $s \in \mathrm{Level}_\kappa(j(T))$ τυχόν στοιχείο στο κ-οστό επίπεδο του $j(T)$.
Θεωρούμε το (γραμμικά διατεταγμένο) σύνολο των προγόνων του:

$$b = \{t \in j(T) : t <_{j(T)} s\}.$$

Όμως, αφού κάθε $t \in b$ βρίσκεται σε επίπεδο $\alpha < \kappa$, έπεται ότι το b είναι, στην πραγματικότητα, κλαδί μεγέθους κ στο δέντρο T.
Συμπεραίνουμε ότι ο (inaccessible) κ έχει την ιδιότητα του δέντρου και, άρα, είναι weakly compact. $\square$

Η ιδέα είναι (εντυπωσιακά) απλή: δεδομένου τυχόντος κ-δέντρου T, κοιτάμε την εικόνα του, $j(T)$, στο M. Παίρνουμε ένα (οποιοδήποτε) τυχόν στοιχείο s από το κ-οστό επίπεδο του $j(T)$. Αυτό μάς δίνει το κ-κλαδί που ψάχνουμε.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (II)

Έστω γράφημα G. Ο **χρωματικός αριθμός** $\chi(G)$ του G ορίζεται ως ο μικρότερος πληθάριθμος λ για τον οποίο υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος με λ χρώματα τέτοιος ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (II)

Έστω γράφημα G. Ο **χρωματικός αριθμός** $\chi(G)$ του G ορίζεται ως ο μικρότερος πληθάριθμος λ για τον οποίο υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος με λ χρώματα τέτοιος ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Πρόταση

Έστω κ measurable και $\lambda < \kappa$. Αν το γράφημα G έχει $|G| = \kappa$ και $\chi(G) > \lambda$, τότε υπάρχει (επαγόμενο) υπογράφημα H του G με $|H| < \kappa$ και $\chi(H) > \lambda$.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (II)

Έστω γράφημα G. Ο **χρωματικός αριθμός** $\chi(G)$ του G ορίζεται ως ο μικρότερος πληθάριθμος λ για τον οποίο υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος με λ χρώματα τέτοιος ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Πρόταση

Έστω κ measurable και $\lambda < \kappa$. Αν το γράφημα G έχει $|G| = \kappa$ και $\chi(G) > \lambda$, τότε υπάρχει (επαγόμενο) υπογράφημα H του G με $|H| < \kappa$ και $\chi(H) > \lambda$.

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη γενικότητας, το G είναι γράφημα στο σύνολο κ.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (ΙΙ)

Έστω γράφημα G. Ο **χρωματικός αριθμός** $\chi(G)$ του G ορίζεται ως ο μικρότερος πληθάριθμος λ για τον οποίο υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος με λ χρώματα τέτοιος ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Πρόταση

Έστω κ measurable και $\lambda < \kappa$. Αν το γράφημα G έχει $|G| = \kappa$ και $\chi(G) > \lambda$, τότε υπάρχει (επαγόμενο) υπογράφημα H του G με $|H| < \kappa$ και $\chi(H) > \lambda$.

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη γενικότητας, το G είναι γράφημα στο σύνολο κ. Αν $j : V \longrightarrow M$ είναι στοιχειώδης εμφύτευση με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, τότε $j(G)$ είναι γράφημα στο $j(\kappa)$.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (II)

Έστω γράφημα G. Ο **χρωματικός αριθμός** $\chi(G)$ του G ορίζεται ως ο μικρότερος πληθάριθμος λ για τον οποίο υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος με λ χρώματα τέτοιος ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Πρόταση

Έστω κ measurable και $\lambda < \kappa$. Αν το γράφημα G έχει $|G| = \kappa$ και $\chi(G) > \lambda$, τότε υπάρχει (επαγόμενο) υπογράφημα H του G με $|H| < \kappa$ και $\chi(H) > \lambda$.

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη γενικότητας, το G είναι γράφημα στο σύνολο κ. Αν $j : V \longrightarrow M$ είναι στοιχειώδης εμφύτευση με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, τότε $j(G)$ είναι γράφημα στο $j(\kappa)$. Το (επαγόμενο) υπογράφημα του $j(G)$ στο σύνολο κ είναι προφανώς το αρχικό G και, επιπλέον, ισχύει ότι $M \models |G| = \kappa \wedge \chi(G) > \lambda$.

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (II)

Έστω γράφημα G. Ο **χρωματικός αριθμός** $\chi(G)$ του G ορίζεται ως ο μικρότερος πληθάριθμος λ για τον οποίο υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος με λ χρώματα τέτοιος ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Πρόταση

Έστω κ measurable και $\lambda < \kappa$. Αν το γράφημα G έχει $|G| = \kappa$ και $\chi(G) > \lambda$, τότε υπάρχει (επαγόμενο) υπογράφημα H του G με $|H| < \kappa$ και $\chi(H) > \lambda$.

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη γενικότητας, το G είναι γράφημα στο σύνολο κ. Αν $j : V \longrightarrow M$ είναι στοιχειώδης εμφύτευση με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, τότε $j(G)$ είναι γράφημα στο $j(\kappa)$. Το (επαγόμενο) υπογράφημα του $j(G)$ στο σύνολο κ είναι προφανώς το αρχικό G και, επιπλέον, ισχύει ότι $M \models |G| = \kappa \wedge \chi(G) > \lambda$. Δηλαδή,

$$M \models \exists H\,(\text{« } H \text{ υπογράφημα του } j(G) \text{ »} \wedge |H| < j(\kappa) \wedge \chi(H) > \lambda).$$

Κλασικές τεχνικές ανάκλασης (II)

Έστω γράφημα G. Ο **χρωματικός αριθμός** $\chi(G)$ του G ορίζεται ως ο μικρότερος πληθάριθμος λ για τον οποίο υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος με λ χρώματα τέτοιος ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Πρόταση

Έστω κ measurable και $\lambda < \kappa$. Αν το γράφημα G έχει $|G| = \kappa$ και $\chi(G) > \lambda$, τότε υπάρχει (επαγόμενο) υπογράφημα H του G με $|H| < \kappa$ και $\chi(H) > \lambda$.

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη γενικότητας, το G είναι γράφημα στο σύνολο κ. Αν $j : V \longrightarrow M$ είναι στοιχειώδης εμφύτευση με $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, τότε $j(G)$ είναι γράφημα στο $j(\kappa)$. Το (επαγόμενο) υπογράφημα του $j(G)$ στο σύνολο κ είναι προφανώς το αρχικό G και, επιπλέον, ισχύει ότι $M \models |G| = \kappa \wedge \chi(G) > \lambda$. Δηλαδή,

$$M \models \exists H\,(\text{« } H \text{ υπογράφημα του } j(G)\text{ »} \wedge |H| < j(\kappa) \wedge \chi(H) > \lambda).$$

Όμως $\lambda = j(\lambda)$ (αφού $\mathrm{cp}(j) = \kappa$) και άρα υπάρχει, στο V, υπογράφημα H του G με $|H| < \kappa$ και $\chi(H) > \lambda$, που είναι και το ζητούμενο. □

Απροσδόκητες (;) συνέπειες

Απροσδόκητες (;) συνέπειες

Θεώρημα (Solovay, 1970)

Η συνέπεια ύπαρξης inaccessible πληθαρίθμου συνεπάγεται τη συνέπεια της $\mathrm{ZF} + \mathrm{DC} +$ «όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα».

Απροσδόκητες (;) συνέπειες

Θεώρημα (Solovay, 1970)

Η συνέπεια ύπαρξης inaccessible πληθαρίθμου συνεπάγεται τη συνέπεια της $\mathsf{ZF} + \mathsf{DC} +$ «όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα».

Θεώρημα (Shelah, 1984)

Ισχύει και το αντίστροφο.

Απροσδόκητες (;) συνέπειες

Θεώρημα (Solovay, 1970)

Η συνέπεια ύπαρξης inaccessible πληθαρίθμου συνεπάγεται τη συνέπεια της $\mathsf{ZF} + \mathsf{DC} +$ «όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα».

Θεώρημα (Shelah, 1984)

Ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα (Shelah, Woodin, 1990)

Αν υπάρχουν άπειροι Woodin πληθάριθμοι, τότε κάθε προβολικό $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Απροσδόκητες (;) συνέπειες

Θεώρημα (Solovay, 1970)

Η συνέπεια ύπαρξης inaccessible πληθαρίθμου συνεπάγεται τη συνέπεια της $\mathsf{ZF} + \mathsf{DC} +$ «όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα».

Θεώρημα (Shelah, 1984)

Ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα (Shelah, Woodin, 1990)

Αν υπάρχουν άπειροι Woodin πληθάριθμοι, τότε κάθε προβολικό $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Ο Harvey Friedman έχει παράξει πλειάδα «συνδυαστικών» προτάσεων της αριθμητικής η απόδειξη των οποίων απαιτεί την υπόθεση συνέπειας (όχι ιδιαίτερα ισχυρών) μεγάλων πληθαρίθμων.

Μεγάλοι πληθάριθμοι και αξιώματα forcing

Οι ισχυρότεροι «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι (supercompact, extendible) συνεπάγονται τη συνέπεια ισχυρών αξιώματων forcing, όπως το *Proper Forcing Axiom* (PFA) και το *Martin's Maximum* (MM).

Μεγάλοι πληθάριθμοι και αξιώματα forcing

Οι ισχυρότεροι «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι (supercompact, extendible) συνεπάγονται τη συνέπεια ισχυρών αξιώματων forcing, όπως το *Proper Forcing Axiom* (PFA) και το *Martin's Maximum* (MM).

Τα αξιώματα αυτά γενικεύουν το γνωστό *Αξίωμα του Martin* και έχουν δραστικές συνέπειες στο συνολοθεωρητικό σύμπαν.

Μεγάλοι πληθάριθμοι και αξιώματα forcing

Οι ισχυρότεροι «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι (supercompact, extendible) συνεπάγονται τη συνέπεια ισχυρών αξιώματων forcing, όπως το *Proper Forcing Axiom* (PFA) και το *Martin's Maximum* (MM).

Τα αξιώματα αυτά γενικεύουν το γνωστό *Αξίωμα του Martin* και έχουν δραστικές συνέπειες στο συνολοθεωρητικό σύμπαν.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:

Μεγάλοι πληθάριθμοι και αξιώματα forcing

Οι ισχυρότεροι «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι (supercompact, extendible) συνεπάγονται τη συνέπεια ισχυρών αξιώματων forcing, όπως το *Proper Forcing Axiom* (PFA) και το *Martin's Maximum* (MM).

Τα αξιώματα αυτά γενικεύουν το γνωστό *Αξίωμα του Martin* και έχουν δραστικές συνέπειες στο συνολοθεωρητικό σύμπαν.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:

Θεώρημα (Todorčević, 1991)

Το PFA (και άρα και το MM) συνεπάγεται ότι $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Μεγάλοι πληθάριθμοι και αξιώματα forcing

Οι ισχυρότεροι «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι (supercompact, extendible) συνεπάγονται τη συνέπεια ισχυρών αξιώματων forcing, όπως το *Proper Forcing Axiom* (PFA) και το *Martin's Maximum* (MM).

Τα αξιώματα αυτά γενικεύουν το γνωστό *Αξίωμα του Martin* και έχουν δραστικές συνέπειες στο συνολοθεωρητικό σύμπαν.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:

Θεώρημα (Todorčević, 1991)

Το PFA (και άρα και το MM) συνεπάγεται ότι $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

- Πληθώρα αποτελεσμάτων σχετικά με τις συνέπειες του PFA σε τοπολογικούς χώρους, χώρους Banach, κ.α.

Μεγάλοι πληθάριθμοι και αξιώματα forcing

Οι ισχυρότεροι «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι (supercompact, extendible) συνεπάγονται τη συνέπεια ισχυρών αξιώματων forcing, όπως το *Proper Forcing Axiom* (PFA) και το *Martin's Maximum* (MM).

Τα αξιώματα αυτά γενικεύουν το γνωστό *Αξίωμα του Martin* και έχουν δραστικές συνέπειες στο συνολοθεωρητικό σύμπαν.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα:

Θεώρημα (Todorčević, 1991)

Το PFA (και άρα και το MM) συνεπάγεται ότι $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

- Πληθώρα αποτελεσμάτων σχετικά με τις συνέπειες του PFA σε τοπολογικούς χώρους, χώρους Banach, κ.α.
- Moore (2006): Ύπαρξη πεπερασμένης βάσης (μεγέθους 5) για όλες τις υπεραριθμήσιμες ολικές διατάξεις.

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών .

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών (υποθέτουμε ότι, ως συνήθως, η φ διατηρείται από ισομορφισμούς).

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών (υποθέτουμε ότι, ως συνήθως, η φ διατηρείται από ισομορφισμούς).

Παραδείγματα:

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών (υποθέτουμε ότι, ως συνήθως, η φ διατηρείται από ισομορφισμούς).

Παραδείγματα:

- Η ιδιότητα «έχει χρωματικό αριθμό $\aleph_0$», για γραφήματα.

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών (υποθέτουμε ότι, ως συνήθως, η φ διατηρείται από ισομορφισμούς).

Παραδείγματα:

- Η ιδιότητα «έχει χρωματικό αριθμό $\aleph_0$», για γραφήματα.
- Η ιδιότητα «είναι ελεύθερη», για αβελιανές ομάδες.

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών (υποθέτουμε ότι, ως συνήθως, η φ διατηρείται από ισομορφισμούς).

Παραδείγματα:

- Η ιδιότητα «έχει χρωματικό αριθμό $\aleph_0$», για γραφήματα.
- Η ιδιότητα «είναι ελεύθερη», για αβελιανές ομάδες.
- Η ιδιότητα «είναι μετρικοποιήσιμος», για (1ους αριθμήσιμους) τοπολογικούς χώρους.

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών (υποθέτουμε ότι, ως συνήθως, η φ διατηρείται από ισομορφισμούς).

Παραδείγματα:

- Η ιδιότητα «έχει χρωματικό αριθμό $\aleph_0$», για γραφήματα.
- Η ιδιότητα «είναι ελεύθερη», για αβελιανές ομάδες.
- Η ιδιότητα «είναι μετρικοποιήσιμος», για (1ους αριθμήσιμους) τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **ανακλαστικός** για την φ αν, για κάθε δομή $\mathcal{A}$, δεδομένου ότι $\varphi(\mathcal{A})$ έπεται ότι υπάρχει υποδομή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ με $|\mathcal{B}| < \kappa$ και $\varphi(\mathcal{B})$.

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών (υποθέτουμε ότι, ως συνήθως, η φ διατηρείται από ισομορφισμούς).

Παραδείγματα:

- Η ιδιότητα «έχει χρωματικό αριθμό $\aleph_0$», για γραφήματα.
- Η ιδιότητα «είναι ελεύθερη», για αβελιανές ομάδες.
- Η ιδιότητα «είναι μετρικοποιήσιμος», για (1ους αριθμήσιμους) τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **ανακλαστικός** για την φ αν, για κάθε δομή $\mathcal{A}$, δεδομένου ότι $\varphi(\mathcal{A})$ έπεται ότι υπάρχει υποδομή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ με $|\mathcal{B}| < \kappa$ και $\varphi(\mathcal{B})$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **συμπαγής** για την φ αν, για κάθε δομή $\mathcal{A}$, δεδομένου ότι για κάθε υποδομή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ με $|\mathcal{B}| < \kappa$ ισχύει $\varphi(\mathcal{B})$ έπεται ότι και $\varphi(\mathcal{A})$.

Ανάκλαση και συμπάγεια

Έστω ότι μελετάμε κάποιες μαθηματικές δομές και μία γενική ιδιότητα φ αυτών (υποθέτουμε ότι, ως συνήθως, η φ διατηρείται από ισομορφισμούς).

Παραδείγματα:

- Η ιδιότητα «έχει χρωματικό αριθμό $\aleph_0$», για γραφήματα.
- Η ιδιότητα «είναι ελεύθερη», για αβελιανές ομάδες.
- Η ιδιότητα «είναι μετρικοποιήσιμος», για (1ους αριθμήσιμους) τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **ανακλαστικός** για την φ αν, για κάθε δομή $\mathcal{A}$, δεδομένου ότι $\varphi(\mathcal{A})$ έπεται ότι υπάρχει υποδομή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ με $|\mathcal{B}| < \kappa$ και $\varphi(\mathcal{B})$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **συμπαγής** για την φ αν, για κάθε δομή $\mathcal{A}$, δεδομένου ότι για κάθε υποδομή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ με $|\mathcal{B}| < \kappa$ ισχύει $\varphi(\mathcal{B})$ έπεται ότι και $\varphi(\mathcal{A})$.

Δυϊκότητα: ανάκλαση για μία ιδιότητα είναι (ισοδύναμη με) συμπάγεια για την άρνηση της ιδιότητας.

Η εμφάνιση των μεγάλων πληθαρίθμων

Θεώρημα (Levy)

Κάθε πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_1-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Η εμφάνιση των μεγάλων πληθαρίθμων

Θεώρημα (Levy)

Κάθε πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_1-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Θεώρημα

Αν ο κ είναι supercompact, τότε είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_2-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Η εμφάνιση των μεγάλων πληθαρίθμων

Θεώρημα (Levy)

Κάθε πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_1-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Θεώρημα

Αν ο κ είναι supercompact, τότε είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_2-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Παραδείγματα

Αν ο κ είναι supercompact, τότε ο κ είναι ανακλαστικός (αλλά και συμπαγής) για τις τρεις ιδιότητες που εμφανίζονται στην προηγούμενη διαφάνεια.

Η εμφάνιση των μεγάλων πληθαρίθμων

Θεώρημα (Levy)

Κάθε πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_1-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Θεώρημα

Αν ο κ είναι supercompact, τότε είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_2-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Παραδείγματα

Αν ο κ είναι supercompact, τότε ο κ είναι ανακλαστικός (αλλά και συμπαγής) για τις τρεις ιδιότητες που εμφανίζονται στην προηγούμενη διαφάνεια.

Θεώρημα

Αν ο κ είναι extendible, τότε είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_3-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Η εμφάνιση των μεγάλων πληθαρίθμων

Θεώρημα (Levy)

Κάθε πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_1-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Θεώρημα

Αν ο κ είναι supercompact, τότε είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_2-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Παραδείγματα

Αν ο κ είναι supercompact, τότε ο κ είναι ανακλαστικός (αλλά και συμπαγής) για τις τρεις ιδιότητες που εμφανίζονται στην προηγούμενη διαφάνεια.

Θεώρημα

Αν ο κ είναι extendible, τότε είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_3-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Γενικά, για $n \geqslant 3$, μία ακριβής «επίπεδο-προς-επίπεδο» αντιστοιχία δίνεται από την ιεραρχία των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων.

Η εμφάνιση των μεγάλων πληθαρίθμων

Θεώρημα (Levy)

Κάθε πληθάριθμος $\kappa > \omega$ είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_1-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Θεώρημα

Αν ο κ είναι supercompact, τότε είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_2-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Παραδείγματα

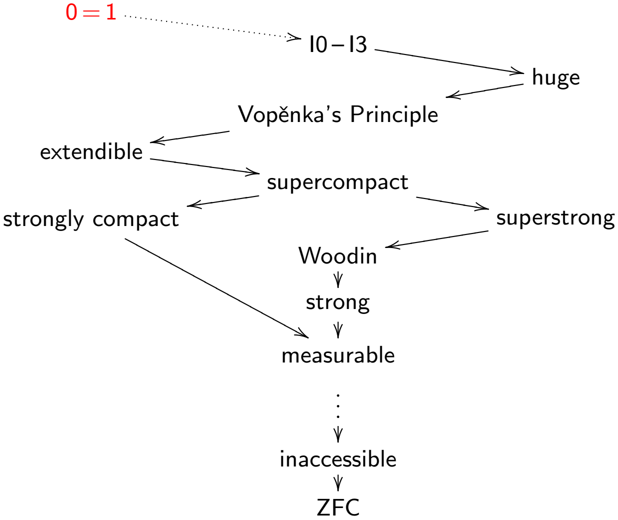
Αν ο κ είναι supercompact, τότε ο κ είναι ανακλαστικός (αλλά και συμπαγής) για τις τρεις ιδιότητες που εμφανίζονται στην προηγούμενη διαφάνεια.

Θεώρημα

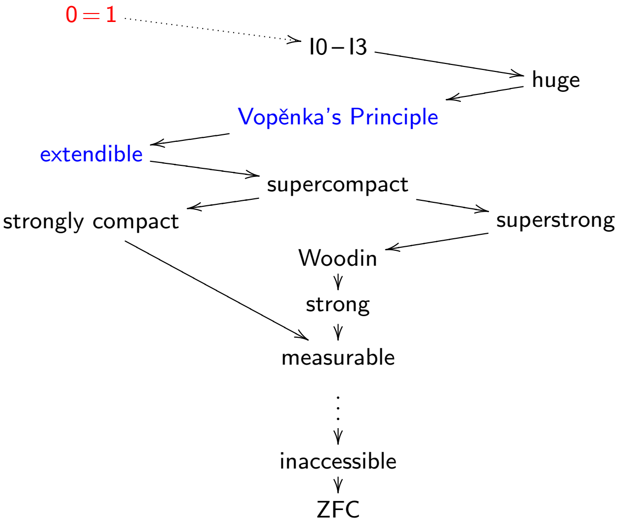
Αν ο κ είναι extendible, τότε είναι ανακλαστικός για κάθε ιδιότητα η οποία είναι Σ_3-εκφράσιμη στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Γενικά, για $n \geqslant 3$, μία ακριβής «επίπεδο-προς-επίπεδο» αντιστοιχία δίνεται από την ιεραρχία των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων. Το «άνω όριο» σε αυτό το φαινόμενο δίνει η Αρχή του Vopěnka (Vopěnka's Principle).

Τοπική εικόνα των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων



Τοπική εικόνα των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων



Τοπική εικόνα των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων

Vopěnka's Principle

Τοπική εικόνα των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων

Vopěnka's Principle

$$\vdots$$

$C^{(n+1)}$-extendible

Τοπική εικόνα των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων

Vopěnka's Principle

$$\vdots$$

$$C^{(n+1)}\text{-extendible}$$
$$\Downarrow$$
$$C^{(n)}\text{-extendible} \qquad (n > 1)$$

Τοπική εικόνα των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων

Vopěnka's Principle

$$\vdots$$

$C^{(n+1)}$-extendible

$$\Downarrow$$

$C^{(n)}$-extendible $\qquad (n > 1)$

$$\vdots$$

$C^{(1)}$-extendible

Τοπική εικόνα των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων

Vopěnka's Principle

$$\vdots$$

$$C^{(n+1)}\text{-extendible}$$
$$\Downarrow$$
$$C^{(n)}\text{-extendible} \qquad (n > 1)$$

$$\vdots$$

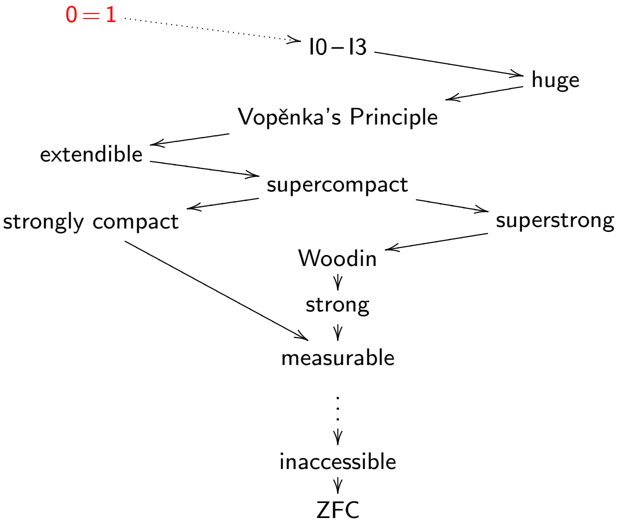
$$C^{(1)}\text{-extendible} \quad = \quad \text{extendible}$$

Τοπική εικόνα των $C^{(n)}$-extendible πληθαρίθμων

$$\begin{array}{ccc} & \text{Vopěnka's Principle} & \\ & \vdots & \\ & C^{(n+1)}\text{-extendible} & \\ & \Downarrow & \\ & C^{(n)}\text{-extendible} & (n > 1) \\ & \vdots & \\ & C^{(1)}\text{-extendible} & = \ \text{extendible} \end{array}$$

Δηλαδή, οι $C^{(n)}$-extendible πληθάριθμοι δημιουργούν μία (γνήσια) ιεραρχία, η οποία «εκλεπτύνει» το διάστημα μεταξύ της Αρχής του Vopěnka και των (κλασικών) extendible πληθαρίθμων.

Μία τελική ματιά



Η μελέτη των μεγάλων πληθαρίθμων καθώς και η γενικότερη αναζήτηση νέων αξιωμάτων βρίσκονται σε πλήρη εξέλιξη.