Τοπική Αναζήτηση

Παναγιώτης Πατσιλινάκος

ΕΜΕ

29 Ιουνίου 2017

1. Εισαγωγή
   - Τοπική αναζήτηση
2. Παραδείγματα
   - Περιοδεύων πωλητής
   - Παίγνια δυναμικού
3. Η κλάση *PLS*
   - *PO* και *NPO*
   - *PLS*
   - *PLS*-πληρότητα

Προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης

- Προβλήματα με πεπερασμένο η αριθμήσιμα άπειρο σύνολο «λύσεων» για τα οποία ψάχνουμε τη λύση που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί μια συνάρτηση κόστους.

Προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης

- Προβλήματα με πεπερασμένο η αριθμήσιμα άπειρο σύνολο «λύσεων» για τα οποία ψάχνουμε τη λύση που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί μια συνάρτηση κόστους.

Ορισμός

- **Στιγμιότυπο** ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης ονομάζεται ένα ζεύγος (S, f), όπου S ένα αριθμήσιμο **σύνολο λύσεων** και $f : S \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κόστους.

Προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης

- Προβλήματα με πεπερασμένο η αριθμήσιμα άπειρο σύνολο «λύσεων» για τα οποία ψάχνουμε τη λύση που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί μια συνάρτηση κόστους.

Ορισμός

- **Στιγμιότυπο** ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης ονομάζεται ένα ζεύγος (S, f), όπου S ένα αριθμήσιμο **σύνολο λύσεων** και $f : S \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κόστους.
- Ένα **πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης** Π, ορίζεται από ένα σύνολο στιγμιοτύπων και από το αν αποτελεί πρόβλημα βελτιστοποίησης η ελαχιστοποίησης.

Προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης

- Προβλήματα με πεπερασμένο η αριθμήσιμα άπειρο σύνολο «λύσεων» για τα οποία ψάχνουμε τη λύση που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί μια συνάρτηση κόστους.

Ορισμός

- **Στιγμιότυπο** ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης ονομάζεται ένα ζεύγος (S, f), όπου S ένα αριθμήσιμο **σύνολο λύσεων** και $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κόστους.
- Ένα **πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης** Π, ορίζεται από ένα σύνολο στιγμιοτύπων και από το αν αποτελεί πρόβλημα βελτιστοποίησης η ελαχιστοποίησης.
- Δεδομένου ενός στιγμιοτύπου (S, f) ενός προβλήματος Π το ζητούμενο είναι μια λύση $s^* \in S$ που να αποτελεί καθολικό βέλτιστο. Δηλαδή, για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης πρέπει $f(s^*) \leq f(s)$ για κάθε $s \in S$. Αντίστροφα για πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Τοπική αναζήτηση

- Μελετάμε αλγορίθμους «**τοπικής αναζήτησης**» για να λύσουμε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

Τοπική αναζήτηση

- Μελετάμε αλγορίθμους «**τοπικής αναζήτησης**» για να λύσουμε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.
- Κάθε αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια **συνάρτηση γειτνίασης** που για κάθε λύση ορίζει τις γειτονικές της.

Ορισμός

- **Συνάρτηση γειτνίασης** N ενός στιγμιότυπου (S, f), είναι μια συνάρτηση $N : S \to 2^S$. Για κάθε λύση $s \in S$ η N ορίζει ένα σύνολο $N(s) \subseteq S$ που ονομάζεται **γειτονιά** του s.

Τοπική αναζήτηση

- Μελετάμε αλγορίθμους «**τοπικής αναζήτησης**» για να λύσουμε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.
- Κάθε αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια **συνάρτηση γειτνίασης** που για κάθε λύση ορίζει τις γειτονικές της.

Ορισμός

- **Συνάρτηση γειτνίασης** N ενός στιγμιότυπου (S, f), είναι μια συνάρτηση $N : S \to 2^S$. Για κάθε λύση $s \in S$ η N ορίζει ένα σύνολο $N(s) \subseteq S$ που ονομάζεται **γειτονιά** του s.
- Έτσι, μια λύση s' είναι **γειτονική** της λύσης s ανν $s' \in S$.

Τοπική αναζήτηση

- Μελετάμε αλγορίθμους «**τοπικής αναζήτησης**» για να λύσουμε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.
- Κάθε αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια **συνάρτηση γειτνίασης** που για κάθε λύση ορίζει τις γειτονικές της.

Ορισμός

- **Συνάρτηση γειτνίασης** N ενός στιγμιότυπου (S, f), είναι μια συνάρτηση $N : S \to 2^S$. Για κάθε λύση $s \in S$ η N ορίζει ένα σύνολο $N(s) \subseteq S$ που ονομάζεται **γειτονιά** του s.
- Έτσι, μια λύση s' είναι **γειτονική** της λύσης s ανν $s' \in S$.
- Ο πληθάριθμος του $N(s)$ ονομάζεται **μέγεθος της γειτονιάς** του s.

Τοπική αναζήτηση

- Μελετάμε αλγορίθμους «**τοπικής αναζήτησης**» για να λύσουμε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.
- Κάθε αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια **συνάρτηση γειτνίασης** που για κάθε λύση ορίζει τις γειτονικές της.

Ορισμός

- **Συνάρτηση γειτνίασης** N ενός στιγμιότυπου (S, f), είναι μια συνάρτηση $N : S \to 2^S$. Για κάθε λύση $s \in S$ η N ορίζει ένα σύνολο $N(s) \subseteq S$ που ονομάζεται **γειτονιά** του s.
- Έτσι, μια λύση s' είναι **γειτονική** της λύσης s ανν $s' \in S$.
- Ο πληθάριθμος του $N(s)$ ονομάζεται **μέγεθος της γειτονιάς** του s.
- Μια συνάρτηση γειτνίασης ονομάζεται **συμμετρική** όταν $s' \in N(s)$ ανν $s \in N(s')$

Γράφος γειτνίασης

Ορισμός

Ο **γράφος γειτνίασης** ενός στιγμιότυπου (S, f) και μιας συνάρτησης γειτνίασης N, είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ όπου:

- Το σύνολο των κόμβων, V, δίνεται από το σύνολο των λύσεων (S).
- Το σύνολο των ακμών E ορίζεται έτσι ώστε $(i, j) \in E$ ανν $j \in N(i)$.
- Τέλος, ορίζουμε το βάρος του κάθε κόμβου ως το κόστος της λύσης στην οποία αντιστοιχεί.

Γράφος γειτνίασης

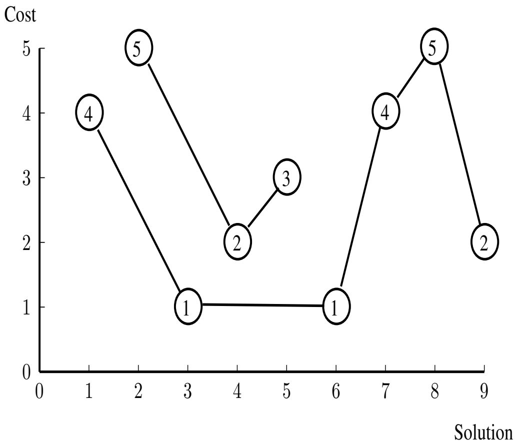
Ορισμός

Ο **γράφος γειτνίασης** ενός στιγμιότυπου (S, f) και μιας συνάρτησης γειτνίασης N, είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ όπου:

- Το σύνολο των κόμβων, V, δίνεται από το σύνολο των λύσεων (S).
- Το σύνολο των ακμών E ορίζεται έτσι ώστε $(i, j) \in E$ ανν $j \in N(i)$.
- Τέλος, ορίζουμε το βάρος του κάθε κόμβου ως το κόστος της λύσης στην οποία αντιστοιχεί.

- Έτσι, η εκτέλεση ενός αλγορίθμου τοπικής αναζήτησης σε ένα στιγμιότυπο, με μια συνάρτηση γειτνίασης, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας περίπατος πάνω στον αντίστοιχο γράφο γειτνίασης.

Παράδειγμα



Λύση	$f(s)$	$N(s)$
1	4	{3}
2	5	{4}
3	1	{1,6}
4	2	{2,5}
5	3	{4}
6	1	{3,7}
7	4	{6,8}
8	5	{7,9}
9	2	{9}

Επαναληπτική βελτίωση

- Όπως είδαμε, κάθε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης είναι ένας περίπατος πάνω στον γράφο γειτνίασης.

Επαναληπτική βελτίωση

- Όπως είδαμε, κάθε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης είναι ένας περίπατος πάνω στον γράφο γειτνίασης.
- Η πιο προφανής στρατηγική είναι ένας αλγόριθμος επαναληπτικής βελτίωσης hill climbing.

Επαναληπτική βελτίωση

- Όπως είδαμε, κάθε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης είναι ένας περίπατος πάνω στον γράφο γειτνίασης.
- Η πιο προφανής στρατηγική είναι ένας αλγόριθμος επαναληπτικής βελτίωσης hill climbing.
- Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος αναζητά στη γειτονιά της τρέχουσας λύσης για μια λύση με καλύτερο κόστος.

Επαναληπτική βελτίωση

- Όπως είδαμε, κάθε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης είναι ένας περίπατος πάνω στον γράφο γειτνίασης.
- Η πιο προφανής στρατηγική είναι ένας αλγόριθμος επαναληπτικής βελτίωσης hill climbing.
- Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος αναζητά στη γειτονιά της τρέχουσας λύσης για μια λύση με καλύτερο κόστος.
- Ο αλγόριθμος που διαλέγει κάθε φορά την γειτονική λύση με το καλύτερο κόστος, ονομάζεται αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης.

Τοπικό βέλτιστο

Ορισμός

Μια λύση s' ονομάζεται **τοπικό βέλτιστο** σε σχέση με τη συνάρτηση N ανν $f(s') \leq f(s)$, για κάθε $s \in N(s')$, για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Αντίστοιχα για πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Τοπικό βέλτιστο

Ορισμός

Μια λύση s' ονομάζεται **τοπικό βέλτιστο** σε σχέση με τη συνάρτηση N ανν $f(s') \leq f(s)$, για κάθε $s \in N(s')$, για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Αντίστοιχα για πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Ορισμός

Ο **γράφος μεταβάσεων** ενός στιγμιοτύπου (S, f) και μιας συνάρτησης γειτνίασης, είναι ένας άκυκλος κατευθυνόμενος υπογράφος του αντίστοιχου γράφου γειτνίασης G. Κατασκευάζεται αφαιρώντας από τον G όλες τις ακμές (i, j) για τις οποίες το κόστος του κόμβου j είναι μεγαλύτερο από το κόστος του κόμβου i.

Τοπικό βέλτιστο

Ορισμός

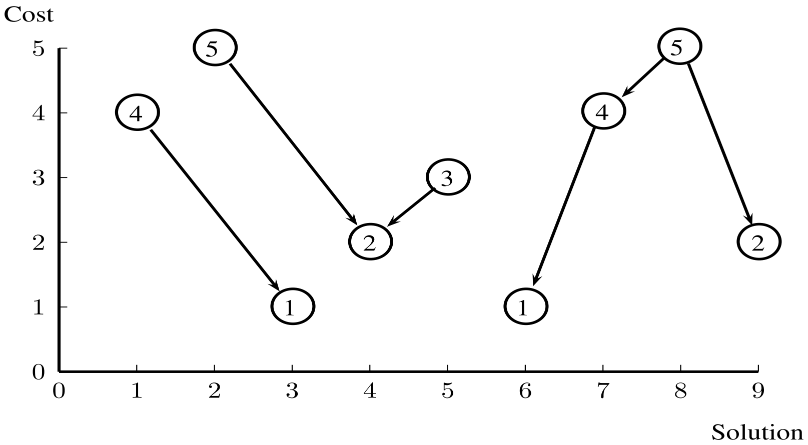
Μια λύση s' ονομάζεται **τοπικό βέλτιστο** σε σχέση με τη συνάρτηση N ανν $f(s') \leq f(s)$, για κάθε $s \in N(s')$, για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Αντίστοιχα για πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Ορισμός

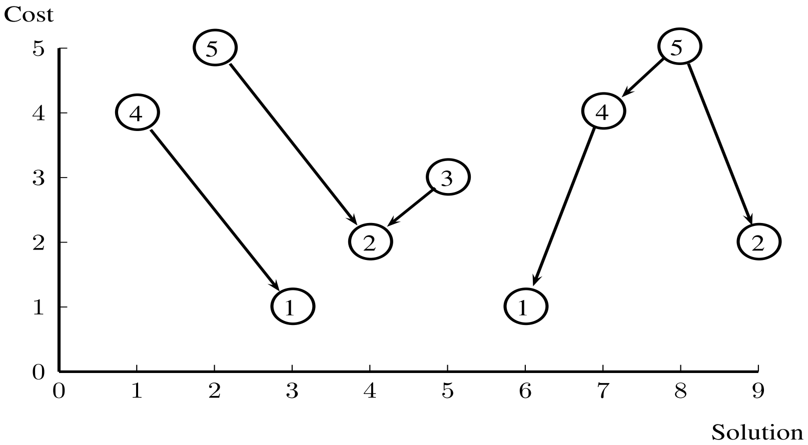
Ο **γράφος μεταβάσεων** ενός στιγμιοτύπου (S, f) και μιας συνάρτησης γειτνίασης, είναι ένας άκυκλος κατευθυνόμενος υπογράφος του αντίστοιχου γράφου γειτνίασης G. Κατασκευάζεται αφαιρώντας από τον G όλες τις ακμές (i, j) για τις οποίες το κόστος του κόμβου j είναι μεγαλύτερο από το κόστος του κόμβου i.

- Παρατηρήστε, ότι μια λύση είναι τοπικό βέλτιστο ανν έχει βαθμό εξόδου 0 στον γράφο μεταβάσεων.

Παράδειγμα γράφου μεταβάσεων



Παράδειγμα γράφου μεταβάσεων



- Παρατηρήστε ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης έχει πρόσβαση σε διαφορετικά τοπικά βέλτιστα ανάλογα με την επιλογή της αρχικής λύσης.

Το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή - TSP

Ορισμός

Έχουμε ένα σύνολο n πόλεων, $C = \{1, 2, .., n\}$ και ένα $n \times n$ πίνακα d , όπου $d_{i,j} \in \mathbb{N}^+$ η απόσταση από την πόλη i στην πόλη j. Ζητείται να βρεθεί μια «περιοδεία» με ελάχιστο μήκος.

Το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή - TSP

Ορισμός

Έχουμε ένα σύνολο n πόλεων, $C = \{1, 2, .., n\}$ και ένα $n \times n$ πίνακα d , όπου $d_{i,j} \in \mathbb{N}^+$ η απόσταση από την πόλη i στην πόλη j. Ζητείται να βρεθεί μια «περιοδεία» με ελάχιστο μήκος.
Δηλαδή, μια διάταξη τ του C που ελαχιστοποιεί τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_{\tau(i),\tau(i+1)} + d_{\tau(n),t(1)}.$$

(Το $\tau(i)$ εδώ, αντιστοιχεί στην i-οστή πόλη που επισκέπτεται, $\tau = (\tau(1), \tau(2), .., \tau(n))$.)

Παράδειγμα

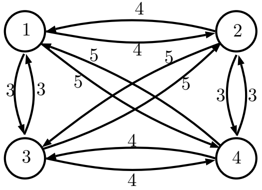
- Ισοδύναμο με εύρεση ελάχιστου Hamiltonian κύκλου με βάρη σε ένα πλήρες, κατευθυνόμενο γράφημα n κόμβων με βάρη στις ακμές, όπου το βάρος της ακμής (i, j) είναι $d_{i,j}$.

Παράδειγμα

- Ισοδύναμο με εύρεση ελάχιστου Hamiltonian κύκλου με βάρη σε ένα πλήρες, κατευθυνόμενο γράφημα n κόμβων με βάρη στις ακμές, όπου το βάρος της ακμής (i,j) είναι $d_{i,j}$.

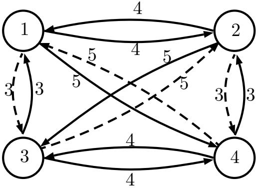
Πχ. Για ένα στιγμιότυπο με n πόλεις και πίνακα αποστάσεων

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$, έχουμε το γράφο



.

Και η περιοδεία $\tau = (1,2,3,4)$ είναι ο κύκλος *Hamilton* :



Γενικά για το πρόβλημα (I)

Χώρος λύσεων (solution space):

Γενικά για το πρόβλημα (I)

Χώρος λύσεων (solution space):

- Πλήθος των διαφορετικών περιοδειών.

Γενικά για το πρόβλημα (I)

Χώρος λύσεων (solution space):

- Πλήθος των διαφορετικών περιοδειών.
- Κάθε περιοδεία ορίζεται από τη σειρά των πόλεων (και μόνο - όχι από το ποια είναι η αρχική πόλη), άρα το μέγεθος του χώρου λύσεων είναι $(n-1)!$

Γενικά για το πρόβλημα (I)

Χώρος λύσεων (solution space):

- Πλήθος των διαφορετικών περιοδειών.
- Κάθε περιοδεία ορίζεται από τη σειρά των πόλεων (και μόνο - όχι από το ποια είναι η αρχική πόλη), άρα το μέγεθος του χώρου λύσεων είναι $(n-1)!$

Ειδικές περιπτώσεις:

Γενικά για το πρόβλημα (Ι)

Χώρος λύσεων (solution space):

- Πλήθος των διαφορετικών περιοδειών.
- Κάθε περιοδεία ορίζεται από τη σειρά των πόλεων (και μόνο - όχι από το ποια είναι η αρχική πόλη), άρα το μέγεθος του χώρου λύσεων είναι $(n-1)!$

Ειδικές περιπτώσεις:

- SYMMETRIC TSP. $d_{i,j} = d_{j,i}$.

Γενικά για το πρόβλημα (I)

Χώρος λύσεων (solution space):

- Πλήθος των διαφορετικών περιοδειών.
- Κάθε περιοδεία ορίζεται από τη σειρά των πόλεων (και μόνο - όχι από το ποια είναι η αρχική πόλη), άρα το μέγεθος του χώρου λύσεων είναι $(n-1)!$

Ειδικές περιπτώσεις:

- SYMMETRIC TSP. $d_{i,j} = d_{j,i}$.
- METRIC TSP. Ο πίνακας αποστάσεων ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα $(d_{i,j} \leq d_{i,k} + d_{k,j})$

Γενικά για το πρόβλημα (I)

Χώρος λύσεων (solution space):

- Πλήθος των διαφορετικών περιοδειών.
- Κάθε περιοδεία ορίζεται από τη σειρά των πόλεων (και μόνο - όχι από το ποια είναι η αρχική πόλη), άρα το μέγεθος του χώρου λύσεων είναι $(n-1)!$

Ειδικές περιπτώσεις:

- SYMMETRIC TSP. $d_{i,j} = d_{j,i}$.
- METRIC TSP. Ο πίνακας αποστάσεων ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα $(d_{i,j} \leq d_{i,k} + d_{k,j})$
- EUCLIDEAN TSP. Οι αποστάσεις των πόλεων είναι η ευκλείδεια απόστασή τους.

Γενικά για το πρόβλημα (II)

- Όλες οι παραπάνω παραλλαγές του προβλήματος είναι NP-hard.

Γενικά για το πρόβλημα (II)

- Όλες οι παραπάνω παραλλαγές του προβλήματος είναι NP-hard.
- Διαφέρουν από άποψη προσεγγισιμότητας:

Γενικά για το πρόβλημα (II)

- Όλες οι παραπάνω παραλλαγές του προβλήματος είναι NP-hard.
- Διαφέρουν από άποψη προσεγγισιμότητας:
- Για τα TSP και SYMMETRIC TSP, η εύρεση μιας περιοδείας μήκους το πολύ $2^{p(n)}$ φορές τη βέλτιστη είναι $NP - hard$ για τυχαίο πολυώνυμο p. (*Sahni, Gonzalez [1976]*)

Γενικά για το πρόβλημα (II)

- Όλες οι παραπάνω παραλλαγές του προβλήματος είναι NP-hard.
- Διαφέρουν από άποψη προσεγγισιμότητας:
- Για τα TSP και SYMMETRIC TSP, η εύρεση μιας περιοδείας μήκους το πολύ $2^{p(n)}$ φορές τη βέλτιστη είναι $NP - hard$ για τυχαίο πολυώνυμο p. (*Sahni, Gonzalez [1976]*)
- Για το METRIC TSP υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου $\frac{3}{2}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος, αλλά η εύρεση περιοδείας με μήκος το πολύ $\frac{220}{219}$ φορές την βέλτιστη είναι NP-hard.(*Christofides [1976] - Cornuejols, Nemhauser [1978] - Papadimitriou, Vempala [2000]*)

Γενικά για το πρόβλημα (II)

- Όλες οι παραπάνω παραλλαγές του προβλήματος είναι NP-hard.
- Διαφέρουν από άποψη προσεγγισιμότητας:
- Για τα TSP και SYMMETRIC TSP, η εύρεση μιας περιοδείας μήκους το πολύ $2^{p(n)}$ φορές τη βέλτιστη είναι $NP - hard$ για τυχαίο πολυώνυμο p. (*Sahni, Gonzalez [1976]*)
- Για το METRIC TSP υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου $\frac{3}{2}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος, αλλά η εύρεση περιοδείας με μήκος το πολύ $\frac{220}{219}$ φορές την βέλτιστη είναι NP-hard.(*Christofides [1976] - Cornuejols, Nemhauser [1978] - Papadimitriou, Vempala [2000]*)
- Για το EUCLIDEAN TSP, υπάρχει ένα PTAS, αλλά όχι FPTAS αν $P \neq NP$. (*Arora [1998] - Ausiello [1999]*)

Αλγόριθμος k-Opt

- Επαναληπτική βελτίωση με χρήση της συνάρτησης γειτνίασης k-change.

Αλγόριθμος k-Opt

- Επαναληπτική βελτίωση με χρήση της συνάρτησης γειτνίασης k-change.
- Μια k-change διαγράφει $k' \leq k$ ακμές από τον αντίστοιχο κύκλο Hamilton της λύσης και τις αντικαθιστά με k' νέες, έτσι ώστε η καινούρια λύση να είναι ορθή (να είναι περιοδεία - κύκλος *Hamilton*).

Αλγόριθμος k-Opt

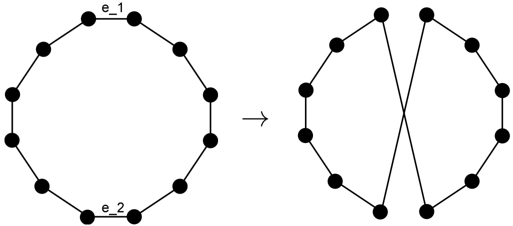
- Επαναληπτική βελτίωση με χρήση της συνάρτησης γειτνίασης k-change.
- Μια k-change διαγράφει $k' \leq k$ ακμές από τον αντίστοιχο κύκλο Hamilton της λύσης και τις αντικαθιστά με k' νέες, έτσι ώστε η καινούρια λύση να είναι ορθή (να είναι περιοδεία - κύκλος *Hamilton*).
- Μια λύση (περιοδεία) είναι γειτονική μιας άλλης αν μπορεί να παραχθεί με εφαρμογή μιας k-change στη δεύτερη.

Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (I)

- Στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με 12 πόλεις και χρήση του k-opt με $k = 2$.

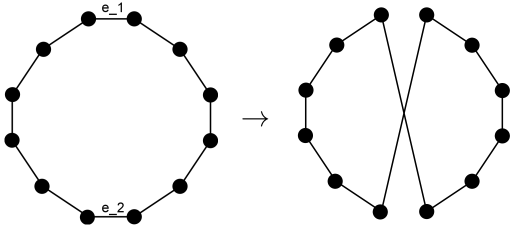
Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (I)

- Στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με 12 πόλεις και χρήση του k-opt με $k = 2$.
- Έστω τυχαία περιοδεία τ. Παράδειγμα εφαρμογής k-change αλλάζοντας τις ακμές e_1, e_2.



Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (I)

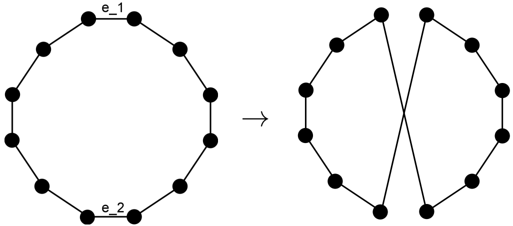
- Στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με 12 πόλεις και χρήση του k-opt με $k = 2$.
- Έστω τυχαία περιοδεία τ. Παράδειγμα εφαρμογής k-change αλλάζοντας τις ακμές e_1, e_2.



- Παρατηρήστε ότι για κάθε δυο ακμές υπάρχει μόνο μια δυνατή αντικατάσταση η οποία να οδηγεί σε μια *νέα* λύση που να είναι ορθή (Ham.).

Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (I)

- Στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με 12 πόλεις και χρήση του k-opt με $k = 2$.
- Έστω τυχαία περιοδεία τ. Παράδειγμα εφαρμογής k-change αλλάζοντας τις ακμές e_1, e_2.



- Παρατηρήστε ότι για κάθε δυο ακμές υπάρχει μόνο μια δυνατή αντικατάσταση η οποία να οδηγεί σε μια *νέα* λύση που να είναι ορθή (Ham.).
- Επιπλέον δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε μόνο μια ακμή, η δυο διαδοχικές και να πάρουμε μια καινούρια, ορθή λύση.

Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (II)

- Άρα, η γειτονιά μιας περιοδείας τ αποτελείται από την περιοδεία τ και μια περιοδεία για κάθε επιλογή δυο μη διαδοχικών ακμών e_2, e_2.

Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (II)

- Άρα, η γειτονιά μιας περιοδείας τ αποτελείται από την περιοδεία τ και μια περιοδεία για κάθε επιλογή δυο μη διαδοχικών ακμών e_2, e_2.
- Άρα το κάθε τ έχει $1 + n(n-3)/2 = 55$, $(\Theta(n^2))$ γείτονες. (Ο τύπος ισχύει για κάθε στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με χρήση της 2-change.)

Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (II)

- Άρα, η γειτονιά μιας περιοδείας τ αποτελείται από την περιοδεία τ και μια περιοδεία για κάθε επιλογή δυο μη διαδοχικών ακμών e_2, e_2.
- Άρα το κάθε τ έχει $1 + n(n-3)/2 = 55$, $(\Theta(n^2))$ γείτονες. (Ο τύπος ισχύει για κάθε στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με χρήση της 2-change.)
- Παρατηρήστε ότι με τη χρήση της k-change στο SYMMETRIC TSP, αν έχουμε το μήκος l μιας περιοδείας και ψάχνουμε το μήκος l' μιας γειτονικής της, μπορούμε να το κάνουμε σε σταθερό χρόνο:

$$l' = l - \sum_{i=1}^{k'} d(e_i) + \sum_{i=1}^{k'} d(e'_i),$$

Όπου $e_1, e_2, .., e_{k'}$ οι ακμές που διαγράφηκαν και $e'_1, e'_2, .., e'_{k'}$ οι ακμές που προστέθηκαν.

Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (II)

- Άρα, η γειτονιά μιας περιοδείας τ αποτελείται από την περιοδεία τ και μια περιοδεία για κάθε επιλογή δυο μη διαδοχικών ακμών e_2, e_2.
- Άρα το κάθε τ έχει $1 + n(n-3)/2 = 55$, $(\Theta(n^2))$ γείτονες. (Ο τύπος ισχύει για κάθε στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με χρήση της 2-change.)
- Παρατηρήστε ότι με τη χρήση της k-change στο SYMMETRIC TSP, αν έχουμε το μήκος l μιας περιοδείας και ψάχνουμε το μήκος l' μιας γειτονικής της, μπορούμε να το κάνουμε σε σταθερό χρόνο:

$$l' = l - \sum_{i=1}^{k'} d(e_i) + \sum_{i=1}^{k'} d(e'_i),$$

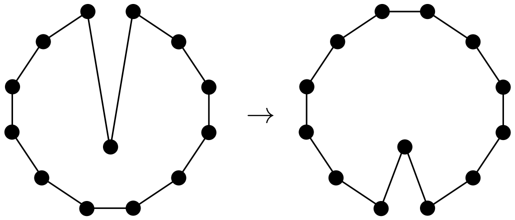
Όπου $e_1, e_2, .., e_{k'}$ οι ακμές που διαγράφηκαν και $e'_1, e'_2, .., e'_{k'}$ οι ακμές που προστέθηκαν.
- Άρα, για το 2-change, μια επανάληψη της επαναληπτικής βελτίωσης γίνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$.

Εναλλακτική συνάρτηση γειτνίασης - node insertion

- Οι γείτονες μιας περιοδείας τ βρίσκονται διαγράφοντας μια πόλη στην τ και προσθέτοντάς την σε μια άλλη θέση στην περιοδεία (ανάμεσα σε δυο άλλους κόμβους).

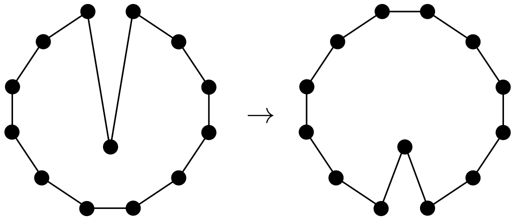
Εναλλακτική συνάρτηση γειτνίασης - node insertion

- Οι γείτονες μιας περιοδείας τ βρίσκονται διαγράφοντας μια πόλη στην τ και προσθέτοντάς την σε μια άλλη θέση στην περιοδεία (ανάμεσα σε δυο άλλους κόμβους).
- Παράδειγμα:



Εναλλακτική συνάρτηση γειτνίασης - node insertion

- Οι γείτονες μιας περιοδείας τ βρίσκονται διαγράφοντας μια πόλη στην τ και προσθέτοντάς την σε μια άλλη θέση στην περιοδεία (ανάμεσα σε δυο άλλους κόμβους).
- Παράδειγμα:



- Μια γενίκευση θα ήταν η εισαγωγή ενός τμήματος διαδοχικών πόλεων ανάμεσα σε δυο γειτονικές στην περιοδεία.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (I)

- Ποια από τις παραπάνω είναι καλύτερη για το πρόβλημα;

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (I)

- Ποια από τις παραπάνω είναι καλύτερη για το πρόβλημα;
- Για να τις συγκρίνουμε αρκεί να μελετήσουμε τις ιδιότητες των γράφων γειτνίασης.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (I)

- Ποια από τις παραπάνω είναι καλύτερη για το πρόβλημα;
- Για να τις συγκρίνουμε αρκεί να μελετήσουμε τις ιδιότητες των γράφων γειτνίασης.
- Ο μέγιστος βαθμός συνδέεται με το κόστος της κάθε επανάληψης του αλγορίθμου (πλήθος γειτόνων).

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (I)

- Ποια από τις παραπάνω είναι καλύτερη για το πρόβλημα;
- Για να τις συγκρίνουμε αρκεί να μελετήσουμε τις ιδιότητες των γράφων γειτνίασης.
- Ο μέγιστος βαθμός συνδέεται με το κόστος της κάθε επανάληψης του αλγορίθμου (πλήθος γειτόνων).
- Η διάμετρος με το ελάχιστο πλήθος επαναλήψεων που μπορεί να απαιτούνται.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (I)

- Ποια από τις παραπάνω είναι καλύτερη για το πρόβλημα;
- Για να τις συγκρίνουμε αρκεί να μελετήσουμε τις ιδιότητες των γράφων γειτνίασης.
- Ο μέγιστος βαθμός συνδέεται με το κόστος της κάθε επανάληψης του αλγορίθμου (πλήθος γειτόνων).
- Η διάμετρος με το ελάχιστο πλήθος επαναλήψεων που μπορεί να απαιτούνται.
- Προσέξτε ότι έτσι συγκρίνουμε μόνο τις συναρτήσεις γειτνίασης, ανεξάρτητα από την πολιτική επιλογής γείτονα από τον αλγόριθμο.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (II)

Θεώρημα

Η διάμετρος του γράφου γειτνίασης του node insertion για το TSP είναι $n-2$.

Απόδειξη

- **Βήμα** 1: $d \leq n-2$, όπου d η διάμετρος.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (II)

Θεώρημα

Η διάμετρος του γράφου γειτνίασης του node insertion για το TSP είναι $n-2$.

Απόδειξη

- **Βήμα 1**: $d \leq n-2$, όπου d η διάμετρος.
- Θα δείξουμε ότι για δυο τυχαίες περιοδείες τ, τ', η τ' μπορεί να παραχθεί από την τ εφαρμόζοντας το πολύ $n-2$ κινήσεις node insertion.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (II)

Θεώρημα

Η διάμετρος του γράφου γειτνίασης του node insertion για το TSP είναι $n-2$.

Απόδειξη

- **Βήμα 1**: $d \leq n-2$, όπου d η διάμετρος.
- Θα δείξουμε ότι για δυο τυχαίες περιοδείες τ, τ', η τ' μπορεί να παραχθεί από την τ εφαρμόζοντας το πολύ $n-2$ κινήσεις node insertion.
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\tau'(1) = \tau(1)$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (ΙΙ)

Θεώρημα

Η διάμετρος του γράφου γειτνίασης του node insertion για το TSP είναι $n-2$.

Απόδειξη

- **Βήμα** 1: $d \leq n-2$, όπου d η διάμετρος.
- Θα δείξουμε ότι για δυο τυχαίες περιοδείες τ, τ', η τ' μπορεί να παραχθεί από την τ εφαρμόζοντας το πολύ $n-2$ κινήσεις node insertion.
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\tau'(1) = \tau(1)$.
- Αφαιρούμε τις πόλεις $\tau'(3), \tau'(4), .., \tau'(5)$ από την τ και τις προσθέτουμε ακριβώς πίσω από την $\tau'(1)$ με αυτή τη σειρά. (Εξαιρούμε πόλεις που έχουν την ίδια θέση).

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (II)

Θεώρημα

Η διάμετρος του γράφου γειτνίασης του node insertion για το TSP είναι $n-2$.

Απόδειξη

- **Βήμα** 1: $d \leq n-2$, όπου d η διάμετρος.
- Θα δείξουμε ότι για δυο τυχαίες περιοδείες τ, τ', η τ' μπορεί να παραχθεί από την τ εφαρμόζοντας το πολύ $n-2$ κινήσεις node insertion.
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\tau'(1) = \tau(1)$.
- Αφαιρούμε τις πόλεις $\tau'(3), \tau'(4), .., \tau'(5)$ από την τ και τις προσθέτουμε ακριβώς πίσω από την $\tau'(1)$ με αυτή τη σειρά. (Εξαιρούμε πόλεις που έχουν την ίδια θέση).
- Άρα το συνολικό πλήθος των node insertions είναι το πολύ $n-2$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

Απόδειξη.

Απόδειξη (cont.)

- **Βήμα 2**: $d \geq n - 2$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

Απόδειξη.

Απόδειξη (cont.)

- **Βήμα 2**: $d \geq n - 2$.
- Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $d \leq n - 3$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

Απόδειξη.

Απόδειξη (cont.)

- **Βήμα 2**: $d \geq n - 2$.
- Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $d \leq n - 3$.
- Έστω η περιοδεία $\tau = (1, 2, ..., n)$ και η περιοδεία $\tau' = (n, n-1, .., 1)$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

Απόδειξη.

Απόδειξη (cont.)

- **Βήμα 2**: $d \geq n - 2$.
- Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $d \leq n - 3$.
- Έστω η περιοδεία $\tau = (1, 2, ..., n)$ και η περιοδεία $\tau' = (n, n - 1, .., 1)$.
- Αφού $d \leq n - 3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την τ' από την τ αλλάζοντας την θέση το πολύ $n - 3$ πόλεων, άρα κρατώντας την σχετική σειρά τουλάχιστον τριών πόλεων.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

Απόδειξη.

Απόδειξη (cont.)

- **Βήμα 2**: $d \geq n - 2$.
- Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $d \leq n - 3$.
- Έστω η περιοδεία $\tau = (1, 2, ..., n)$ και η περιοδεία $\tau' = (n, n-1, .., 1)$.
- Αφού $d \leq n - 3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την τ' από την τ αλλάζοντας την θέση το πολύ $n - 3$ πόλεων, άρα κρατώντας την σχετική σειρά τουλάχιστον τριών πόλεων.
- Αυτό είναι άτοπο αφού για τρεις πόλεις i, j, k με $i < j < k$ έχουμε ότι η περιοδεία τ τις επισκέπτεται με σειρά i, j, k ενώ η τ' με σειρά k, j, i.

□

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

- Εύκολα βλέπουμε, ότι για το TSP κάθε κόμβος στον γράφο γειτνίασης του node insertion έχει βαθμό $n(n-3)$ για κάθε $n \geq 4$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

- Εύκολα βλέπουμε, ότι για το TSP κάθε κόμβος στον γράφο γειτνίασης του node insertion έχει βαθμό $n(n-3)$ για κάθε $n \geq 4$.
- Επιπλέον, για το γράφο γειτνίασης του 2-change ισχύουν:

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

- Εύκολα βλέπουμε, ότι για το TSP κάθε κόμβος στον γράφο γειτνίασης του node insertion έχει βαθμό $n(n-3)$ για κάθε $n \geq 4$.
- Επιπλέον, για το γράφο γειτνίασης του 2-change ισχύουν:
    - Κάθε κόμβος έχει βαθμό $n(n-2)-2$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

- Εύκολα βλέπουμε, ότι για το TSP κάθε κόμβος στον γράφο γειτνίασης του node insertion έχει βαθμό $n(n-3)$ για κάθε $n \geq 4$.
- Επιπλέον, για το γράφο γειτνίασης του 2-change ισχύουν:
  - Κάθε κόμβος έχει βαθμό $n(n-2)-2$.
  - Ο γράφος έχει διάμετρο d που ικανοποιεί $\frac{n}{2} \leq d \leq n-2$ για $n >= 5$.

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

- Εύκολα βλέπουμε, ότι για το TSP κάθε κόμβος στον γράφο γειτνίασης του node insertion έχει βαθμό $n(n-3)$ για κάθε $n \geq 4$.
- Επιπλέον, για το γράφο γειτνίασης του 2-change ισχύουν:
  - Κάθε κόμβος έχει βαθμό $n(n-2)-2$.
  - Ο γράφος έχει διάμετρο d που ικανοποιεί $\frac{n}{2} \leq d \leq n-2$ για $n >= 5$.
- Άρα βλέπουμε ότι και οι δυο συναρτήσεις γειτνίασης έχουν γράφους μεταβάσεων με διάμετρο $\mathcal{O}(n)$ και μέγιστο βαθμό $\mathcal{O}(n^2)$.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (Ι)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (Ι)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός**:

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (I)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός**:
  - Ένας παίκτης που παίρνει αποφάσεις με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους του.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (I)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός**:
  - Ένας παίκτης που παίρνει αποφάσεις με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους του.
  - Από von Neumann και Morgenstern (με βασικές παραδοχές) υπάρχει ανάθεση ποσού (αριθμητικού) σε κάθε συνδυασμό επιλογών των παικτών του παιγνίου που να αντιπροσωπεύει (σχετικά) το κέρδος του παίκτη.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (Ι)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός**:
  - Ένας παίκτης που παίρνει αποφάσεις με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους του.
  - Από von Neumann και Morgenstern (με βασικές παραδοχές) υπάρχει ανάθεση ποσού (αριθμητικού) σε κάθε συνδυασμό επιλογών των παικτών του παιγνίου που να αντιπροσωπεύει (σχετικά) το κέρδος του παίκτη.
- **Ευφυής**

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (Ι)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός**:
  - Ένας παίκτης που παίρνει αποφάσεις με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους του.
  - Από von Neumann και Morgenstern (με βασικές παραδοχές) υπάρχει ανάθεση ποσού (αριθμητικού) σε κάθε συνδυασμό επιλογών των παικτών του παιγνίου που να αντιπροσωπεύει (σχετικά) το κέρδος του παίκτη.
- **Ευφυής**
  - Έχει πλήρη γνώση της δομής του παιχνιδιού και των διαθέσιμων στρατηγικών όλων των παικτών.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (Ι)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός**:
  - Ένας παίκτης που παίρνει αποφάσεις με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους του.
  - Από von Neumann και Morgenstern (με βασικές παραδοχές) υπάρχει ανάθεση ποσού (αριθμητικού) σε κάθε συνδυασμό επιλογών των παικτών του παιγνίου που να αντιπροσωπεύει (σχετικά) το κέρδος του παίκτη.
- **Ευφυής**
  - Έχει πλήρη γνώση της δομής του παιχνιδιού και των διαθέσιμων στρατηγικών όλων των παικτών.
  - Μπορεί να κατανοήσει μια κατάσταση και να εξάγει συμπεράσματα γι΄ αυτήν.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (I)

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός**:
  - Ένας παίκτης που παίρνει αποφάσεις με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους του.
  - Από von Neumann και Morgenstern (με βασικές παραδοχές) υπάρχει ανάθεση ποσού (αριθμητικού) σε κάθε συνδυασμό επιλογών των παικτών του παιγνίου που να αντιπροσωπεύει (σχετικά) το κέρδος του παίκτη.
- **Ευφυής**
  - Έχει πλήρη γνώση της δομής του παιχνιδιού και των διαθέσιμων στρατηγικών όλων των παικτών.
  - Μπορεί να κατανοήσει μια κατάσταση και να εξάγει συμπεράσματα γι΄ αυτήν.
  - Γνωρίζει ότι και οι άλλοι παίκτες είναι λογικοί και ευφυείς.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (II)

Παίγνιο σε στρατηγική μορφή

Ένα παίγνιο σε στρατηγική μορφή, είναι κάποιο Γ της μορφής:

$$\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$$

Όπου:

- N το σύνολο παικτών.
- C_i το σύνολο των διαθέσιμων *αγνών* στρατηγικών του παίκτη i.
- $u_i : \times_{j \in N} C_j \to \mathbb{R}$ το κέρδος του παίκτη i σε ένα *περίγραμμα στρατηγικών*.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (ΙΙ)

Παίγνιο σε στρατηγική μορφή

Ένα παίγνιο σε στρατηγική μορφή, είναι κάποιο Γ της μορφής:

$$\Gamma = (N, (C_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$$

Όπου:

- N το σύνολο παικτών.
- C_i το σύνολο των διαθέσιμων *αγνών* στρατηγικών του παίκτη i.
- $u_i : \times_{j\in N} C_j \rightarrow \mathbb{R}$ το κέρδος του παίκτη i σε ένα *περίγραμμα στρατηγικών*.

Περίγραμμα στρατηγικής - Κατάσταση παιγνίου

Ένας συνδυασμός στρατηγικών (μια για κάθε παίκτη) που μπορούν να επιλέξουν οι παίκτες του συνόλου N. Συμβολίζουμε ως $C = \times_{j\in N} C_j$ το σύνολο όλων των πιθανών περιγραμμάτων αγνών στρατηγικών

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (ΙΙΙ)

Μικτή στρατηγική

Δεδομένου ενός παιγνίου $Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ μια **μικτή στρατηγική** του παίκτη i είναι μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο C_i.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (III)

Μικτή στρατηγική

Δεδομένου ενός παιγνίου $Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ μια **μικτή στρατηγική** του παίκτη i είναι μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο C_i. Έστω $\Delta(C_i)$ το σύνολο όλων των δυνατών πιθανοτικών στρατηγικών του παίκτη i.

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (ΙΙΙ)

Μικτή στρατηγική

Δεδομένου ενός παιγνίου $Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ μια **μικτή στρατηγική** του παίκτη i είναι μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο C_i. Έστω $\Delta(C_i)$ το σύνολο όλων των δυνατών πιθανοτικών στρατηγικών του παίκτη i.

Περίγραμμα μεικτών στρατηγικών

- Ένα διάνυσμα που καθορίζει μια μικτή στρατηγική για κάθε παίκτη (σύνολο όλων των δυνατών περιγραμμάτων: $\times_{i \in N} \Delta(C_i)$).
- Δηλαδή, σ είναι περίγραμμα στρατηγικών, $\sigma \in \times_{i \in N} \Delta(C_i)$ ανν για κάθε $i \in N$ και $c_i \in C_i$ ορίζει την πιθανότητα $\sigma_i(c_i)$, $(\sigma = (\sigma_i)_{i \in N})$, ο παίκτης i να επιλέξει τη στρατηγική c_i έτσι ώστε:

$$\sum_{d_i \in C_i} \sigma_i(d_i) = 1, \quad \forall i \in N$$

Ισορροπία Nash

- Έστω $u_i(\sigma)$ το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη i στο περίγραμμα σ $\left(u_i(\sigma) = \sum_{c \in C} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(c_j) \right) u_i(c), \forall i \in N, c = (c_i)_{i \in N} \right)$

Ισορροπία Nash

- Έστω $u_i(\sigma)$ το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη i στο περίγραμμα σ $\left(u_i(\sigma) = \sum_{c \in C}\left(\prod_{j \in N} \sigma_j(c_j)\right) u_i(c), \forall i \in N, c = (c_i)_{i \in N}\right)$
- Για $\tau_i \in \Delta(C_i)$ έστω (σ_{-i}, τ_i) το περίγραμμα στο οποίο ο i-οστός συντελεστής είναι τ_i και οι υπόλοιποι όπως στο σ (ένας παίκτης άλλαξε στρατηγική).

Ορισμός

Ένα περίγραμμα σ είναι **ισορροπία Nash** (NE) ανν δεν υπάρχει παίκτης που μπορεί να αυξήσει το κέρδος του αν αποκλίνει μονομερώς από το σ. δηλ:

$$u_i(\sigma) \geq u_i(\sigma_{-i}, \tau_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall \tau_i \in \Delta(C_i)$$

Θεώρημα Nash

Θεώρημα Nash (*Nash, [1951]*)

Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο Γ σε στρατηγική μορφή, υπάρχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash στο $\times_{i \in N} \Delta(C_i)$.

Θεώρημα Nash

Θεώρημα Nash (*Nash, [1951]*)

Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο Γ σε στρατηγική μορφή, υπάρχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash στο $\times_{i \in N} \Delta(C_i)$.

Ορισμός

Ένα περίγραμμα αγνών στρατηγικών $c \in C$ είναι **αγνή ισορροπία Nash** ανν:

$$u_i(c) \geq u_i(c_{-i}, d_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall d_i \in C_i$$

Θεώρημα Nash

Θεώρημα Nash (*Nash, [1951]*)

Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο Γ σε στρατηγική μορφή, υπάρχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash στο $\times_{i \in N} \Delta(C_i)$.

Ορισμός

Ένα περίγραμμα αγνών στρατηγικών $c \in C$ είναι **αγνή ισορροπία Nash** ανν:

$$u_i(c) \geq u_i(c_{-i}, d_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall d_i \in C_i$$

- Δεν υπάρχει πάντα.

Παίγνια δυναμικού (Ι)

Ορισμός

Έστω παίγνιο Γ και c, c' δυο οποιεσδήποτε καταστάσεις του (περιγράμματα) που διαφέρουν μόνο στην στρατηγική του παίκτη i.
Συνάρτηση δυναμικού $\Phi : C \to \mathbb{R}$ όπου C το σύνολο καταστάσεων του παιγνίου, ονομάζεται μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$(u_i(c) - u_i(c')) \cdot (\Phi(c) - \Phi(c')) > 0, \text{ όταν } (u_i(c) - u_i(c') \neq 0.$$

Παίγνια δυναμικού (I)

Ορισμός

Έστω παίγνιο Γ και c, c' δυο οποιεσδήποτε καταστάσεις του (περιγράμματα) που διαφέρουν μόνο στην στρατηγική του παίκτη i. **Συνάρτηση δυναμικού** $\Phi : C \to \mathbb{R}$ όπου C το σύνολο καταστάσεων του παιγνίου, ονομάζεται μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$(u_i(c) - u_i(c')) \cdot (\Phi(c) - \Phi(c')) > 0, \text{ όταν } (u_i(c) - u_i(c') \neq 0.$$

Ορισμός

Παίγνιο δυναμικού, ονομάζεται ένα παίγνιο για το οποίο υπάρχει συνάρτηση δυναμικού.

Παίγνια δυναμικού (II)

Θεώρημα

Κάθε παίγνιο δυναμικού έχει τουλάχιστον μια αγνή ισορροπία κατά Nash.

Απόδειξη.

- Αφού το παίγνιο έχει πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται σε κάποιες από αυτές.

Παίγνια δυναμικού (II)

Θεώρημα

Κάθε παίγνιο δυναμικού έχει τουλάχιστον μια αγνή ισορροπία κατά Nash.

Απόδειξη.

- Αφού το παίγνιο έχει πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται σε κάποιες από αυτές.
- Έστω c η κατάσταση στην οποία ελαχιστοποιείται και c' μια κατάσταση που διαφέρει από την c στη στρατηγική ενός μόνο παίκτη i.

Παίγνια δυναμικού (II)

Θεώρημα

Κάθε παίγνιο δυναμικού έχει τουλάχιστον μια αγνή ισορροπία κατά Nash.

Απόδειξη.

- Αφού το παίγνιο έχει πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται σε κάποιες από αυτές.
- Έστω c η κατάσταση στην οποία ελαχιστοποιείται και c' μια κατάσταση που διαφέρει από την c στη στρατηγική ενός μόνο παίκτη i.
- Έχουμε ότι $\Phi(c) \leq \Phi(c')$, που από ορισμό δυναμικής συνάρτησης σημαίνει $u_i(c) \leq u_i(c')$.

Παίγνια δυναμικού (II)

Θεώρημα

Κάθε παίγνιο δυναμικού έχει τουλάχιστον μια αγνή ισορροπία κατά Nash.

Απόδειξη.

- Αφού το παίγνιο έχει πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται σε κάποιες από αυτές.
- Έστω c η κατάσταση στην οποία ελαχιστοποιείται και c' μια κατάσταση που διαφέρει από την c στη στρατηγική ενός μόνο παίκτη i.
- Έχουμε ότι $\Phi(c) \leq \Phi(c')$, που από ορισμό δυναμικής συνάρτησης σημαίνει $u_i(c) \leq u_i(c')$.
- Συνεπώς ο παίκτης i δεν έχει συμφέρον να αποκλίνει μονομερώς.

$\square$

Παίγνια δυναμικού (III)

- Από το παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι κάθε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού είναι αγνή ισορροπία κατά *Nash*.

Παίγνια δυναμικού (III)

- Από το παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι κάθε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού είναι αγνή ισορροπία κατά *Nash*.

Θεώρημα

Για ένα παίγνιο δυναμικού Γ, κάθε αλγόριθμος, επαναληπτικής βελτίωσης με σύνολο λύσεων το σύνολο των καταστάσεων του παιγνίου (C), *συνάρτηση γειτνίασης* $f : C \to 2^C$ *με* $\{f(c) = C_c | \forall c' \in C_c \text{οι } c \text{ και } c' \text{διαφέρουν στη στρατ. ενός παίκτη}\}$ *και συνάρτηση κόστους τη συνάρτηση δυναμικού , καταλήγει σε αγνή ισορροπία Nash.*

Απόδειξη.

Προφανής. □

Παίγνια συμφόρησης (I)

Ορισμός

Ένα **παίγνιο συμφόρησης** $(N, E, (\Sigma_i)_{i \in N}, (f_e)_{e \in E})$ ορίζεται ως εξής:

- $N = \{1..n\}$ το σύνολο των παικτών.
- $E = \{1..m\}$ το σύνολο των πόρων.
- Για κάθε $i \in N$, το σύνολο των στρατηγικών του i, Σ_i , είναι ένα υποσύνολο των πώρων (που χρησιμοποιεί ο παίκτης).
- Για κάθε $e \in E$, $f_e : N \to R^+$ είναι η συνάρτηση καθυστέρησης του πόρου e. Αν x παίκτες χρησιμοποιούν τον πόρο e η $f_e(x)$ δείχνει σε πόση καθυστέρηση υπόκεινται.

Παίγνια συμφόρησης (II)

Θεώρημα (Θεώρημα. Συνάρτηση Rosenthal)

Η συνάρτηση $\Phi(c) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(c)} f_e(i)$, *όπου* c *μια κατάσταση και* $n_e(c)$ *το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τον πόρο* e *στην κατάσταση* c, *αποτελεί ακριβή συνάρτηση δυναμικού για κάθε παίγνιο συμφόρησης.*

PO και NPO (I)

- Αντίστοιχες των P και NP για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

PO και NPO (I)

- Αντίστοιχες των P και NP για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

NPO

Περιέχει τα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης για τα οποία:

- Μπορούμε να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο κατά πόσον μια είσοδος x ορίζει ένα έγκυρο στιγμιότυπο του προβλήματος...
- Για το οποίο η συνάρτηση κόστους είναι υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο..
- Και μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να αποφασίσουμε αν μια συμβολοσειρά s είναι αποδεκτή λύση του στιγμιότυπου, όπου το μέγεθος της κάθε αποδεκτής λύσης είναι μικρότερο από ένα όριο που είναι πολυωνυμική συνάρτηση του μεγέθους της μεταβλητής εισόδου.

PO και NPO (II)

PO

Η PO περιέχει τα προβλήματα της κλάσης NPO για τα οποία μπορούμε να βρούμε τη βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ιδιότητες PO και NPO

- Προφανώς ένα πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης.

Ιδιότητες PO και NPO

- Προφανώς ένα πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης.
- Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν η κλάση των «δύσκολων» προβλημάτων στην NPO ταυτίζεται με την κλάση των NP-hard προβλημάτων στην NPO.

Ιδιότητες PO και NPO

- Προφανώς ένα πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης.
- Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν η κλάση των «δύσκολων» προβλημάτων στην NPO ταυτίζεται με την κλάση των NP-hard προβλημάτων στην NPO.
- Θα χρησιμοποιήσουμε αναγωγές Turing που μας επιτρέπουν να ανάξουμε προβλήματα της NP σε προβλήματα της NPO.

Ιδιότητες PO και NPO (II)

- Θα ορίσουμε ένα NPO-πλήρες συνδυαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης και το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης και έπειτα θα δείξουμε ότι ανάγονται κατά Turing το ένα στο άλλο.

Ορισμός MVS

- Έστω ένα σύνολο δυαδικών μεταβλητών $U = x_1, x_2, ..x_n$, ένα σύνολο λογικών προτάσεων C της μορφής $c = (c_1 \vee c_2 \vee .. \vee c_m)$ (ρήτρες) με μεταβλητές (η αρνήσεις τους) από το U και ένα βάρος $w(x_i)$ για κάθε μεταβλητή x_i.
- Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μια ανάθεση τιμών αληθείας που να ικανοποιεί όλες τις ρήτρες στο C, **μεγιστοποιώντας** το άθροισμα των βαρών των μεταβλητών που έχουν αποτιμηθεί ως αληθείς.

Ιδιότητες PO και NPO (III)

Ορισμός MVS_{dec}

- Έχουμε $MVS \in NPO$. Το MVS_{dec} είναι το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης ($MVS_{dec} \in NP$).
- Δηλαδή πρέπει να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια ανάθεση τιμών αληθείας που να ικανοποιεί όλες της ρήτρες και το κόστος της να είναι ίσο η μεγαλύτερο ενός κάτω ορίου B.

Λήμμα

Τα MVS και MVS_{dec} ανάγονται κατά Turing το ένα στο άλλο.

Απόδειξη.

1. $MVS_{dec} \leq_T MVS$, προφανές.

Ιδιότητες PO και NPO (IV)

Απόδειξη. (cont.)

2. $MVS \leq_T MVS_{dec}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για το MVS χρησιμοποιώντας ένα μαντείο για το MVS_{dec}.

Ιδιότητες PO και NPO (IV)

Απόδειξη. (cont.)

2. $MVS \leq_T MVS_{dec}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για το MVS χρησιμοποιώντας ένα μαντείο για το MVS_{dec}.
    - Κατασκευάζουμε τον αλγόριθμο που υπολογίζει το μέγιστο δυνατό κόστος που μπορεί να έχει μια απόδοση τιμών αληθείας σε ένα στιγμιότυπο.
    - Μπορούμε να το κάνουμε σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας το μαντείο του MVS_{dec}:

Ιδιότητες PO και NPO (IV)

Απόδειξη. (cont.)

2. $MVS \leq_T MVS_{dec}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για το MVS χρησιμοποιώντας ένα μαντείο για το MVS_{dec}.
    - Κατασκευάζουμε τον αλγόριθμο που υπολογίζει το μέγιστο δυνατό κόστος που μπορεί να έχει μια απόδοση τιμών αληθείας σε ένα στιγμιότυπο.
    - Μπορούμε να το κάνουμε σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας το μαντείο του MVS_{dec}:
    - Κάνουμε δυαδική αναζήτηση στο εύρος $[0, \sum_i w(x_i)]$ και βρίσκουμε το μεγαλύτερο B για το οποίο το MVS_{dec} επιστρέφει θετικό αποτέλεσμα (αλγόριθμος A_1).

Ιδιότητες PO και NPO (V)

Απόδειξη. (cont.)

- Αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο (πολ. χρόνου) που θα βρίσκει την ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τις ρήτρες και έχει κόστος ίσο με το αποτέλεσμα του A_1 στο αρχικό στιγμιότυπο.

Ιδιότητες PO και NPO (V)

Απόδειξη. (cont.)

- Αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο (πολ. χρόνου) που θα βρίσκει την ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τις ρήτρες και έχει κόστος ίσο με το αποτέλεσμα του A_1 στο αρχικό στιγμιότυπο.
- Περιγραφή του αλγορίθμου, στο βήμα i:
- Κατασκεύασε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I_0 από το αρχικό πρόβλημα, αντικαθιστώντας τις $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ με τις τιμές που έχουν επιστρέψει τα πρώτα $i-1$ βήματα και θέσε $x_i = 0$.

Ιδιότητες PO και NPO (V)

Απόδειξη. (cont.)

- Αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο (πολ. χρόνου) που θα βρίσκει την ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τις ρήτρες και έχει κόστος ίσο με το αποτέλεσμα του A_1 στο αρχικό στιγμιότυπο.
- Περιγραφή του αλγορίθμου, στο βήμα i:
- Κατασκεύασε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I_0 από το αρχικό πρόβλημα, αντικαθιστώντας τις $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ με τις τιμές που έχουν επιστρέψει τα πρώτα $i-1$ βήματα και θέσε $x_i = 0$.
- Όμοια κατασκευάζουμε το I_1 θέτοντας $x_i = 1$.

Ιδιότητες PO και NPO (V)

Απόδειξη. (cont.)

- Αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο (πολ. χρόνου) που θα βρίσκει την ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τις ρήτρες και έχει κόστος ίσο με το αποτέλεσμα του A_1 στο αρχικό στιγμιότυπο.
- Περιγραφή του αλγορίθμου, στο βήμα i:
- Κατασκεύασε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I_0 από το αρχικό πρόβλημα, αντικαθιστώντας τις $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ με τις τιμές που έχουν επιστρέψει τα πρώτα $i-1$ βήματα και θέσε $x_i = 0$.
- Όμοια κατασκευάζουμε το I_1 θέτοντας $x_i = 1$.
- Τρέξε τον A_1 στα I_0 και I_1 αντίστοιχα και ανάλογα με το ποιο στιγμιότυπο επιστρέφει τη μεγαλύτερη έξοδο, θέσε και το x_i.

□

Ιδιότητες PO και NPO (VI)

Θεώρημα

Το MVS είναι NPO-πλήρες (G. Ausiello et al. (1999))

Θεώρημα

Ένα πρόβλημα $\Pi \in$ *NPO είναι NPO-πλήρες ανν το* Π *είναι NP-δύσκολο. (Αν χρησιμοποιήσουμε αναγωγές Turing για να συσχετίσουμε την πολυπλοκότητα των προβλημάτων)*

Απόδειξη.

- Προφανώς αν Π NPO-πλήρες είναι και NP-δύσκολο.

Ιδιότητες PO και NPO (VI)

Θεώρημα

Το MVS είναι NPO-πλήρες (G. Ausiello et al. (1999))

Θεώρημα

Ένα πρόβλημα Π ∈ NPO είναι NPO-πλήρες ανν το Π είναι NP-δύσκολο. (Αν χρησιμοποιήσουμε αναγωγές Turing για να συσχετίσουμε την πολυπλοκότητα των προβλημάτων)

Απόδειξη.

- Προφανώς αν Π NPO-πλήρες είναι και NP-δύσκολο.
- Έστω ότι το Π είναι NP-δύσκολο.

Ιδιότητες PO και NPO (VI)

Θεώρημα

Το MVS είναι NPO-πλήρες (G. Ausiello et al. (1999))

Θεώρημα

Ένα πρόβλημα $\Pi \in NPO$ *είναι NPO-πλήρες ανν το* Π *είναι NP-δύσκολο. (Αν χρησιμοποιήσουμε αναγωγές Turing για να συσχετίσουμε την πολυπλοκότητα των προβλημάτων)*

Απόδειξη.

- Προφανώς αν Π NPO-πλήρες είναι και NP-δύσκολο.
- Έστω ότι το Π είναι NP-δύσκολο.
- Τότε το $MVS \leq_T MVS_{dec} \leq_T \Pi$ και το MVS είναι NPO-πλήρες.

$\square$

Ιδιότητες PO και NPO (VII)

Θεώρημα

$PO = NPO$ *ανν* $P = NP$.

Απόδειξη.

1. Αν $PO = NPO$ τότε όλα τα NP-δύσκολα προβλήματα της NPO (πχ TSP) μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, άρα $P = NP$.

Ιδιότητες PO και NPO (VII)

Θεώρημα

$PO = NPO$ *ανν* $P = NP$.

Απόδειξη.

1. Αν $PO = NPO$ τότε όλα τα NP-δύσκολα προβλήματα της NPO (πχ TSP) μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, άρα $P = NP$.
2. Αν $P = NP$ τότε το MVS_{dec} μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Αλλά $MVS \leq_T MVS_{dec}$ (λύνεται σε πολ. χρόνο) και το MVS είναι NPO-πλήρες.

□

Εισαγωγή

Ορισμός

Στιγμιότυπο ενός προβλήματος τοπικής αναζήτησης είναι η τριάδα (S, f, N) με (S, f) ένα στιγμιότυπο ενός συνδυαστικού προβλήματος βελτιστοποίησης και $N : S \to 2^S$ μια συνάρτηση γειτνίασης για το S.

Εισαγωγή

Ορισμός

Στιγμιότυπο ενός προβλήματος τοπικής αναζήτησης είναι η τριάδα (S, f, N) με (S, f) ένα στιγμιότυπο ενός συνδυαστικού προβλήματος βελτιστοποίησης και $N : S \to 2^S$ μια συνάρτηση γειτνίασης για το S.

Ορισμός

Ένα **πρόβλημα τοπικής αναζήτησης** Π_{LS} ορίζεται από ένα σύνολο στιγμιοτύπων και από το αν είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης η μεγιστοποίησης.
Δεδομένου ενός στιγμιότυπου (S, f, N), ζητείται μια τοπικά βέλτιστη λύση $\hat{s} \in N(s)$ (πχ. $f(\hat{s}) \geq f(s)$, $\forall s \in N(s)$, για πρόβλημα βελτιστοποίησης).

Ορισμός PLS

Ορισμός

Έστω πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} και Π το αντίστοιχο πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Λέμε ότι το Π_{LS} ανήκει στην κλάση PLS αν $\Pi \in NPO$ και υπάρχουν δυο αλγόριθμοι A, B, πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

Ορισμός PLS

Ορισμός

Έστω πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} και Π το αντίστοιχο πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Λέμε ότι το Π_{LS} ανήκει στην κλάση PLS αν $\Pi \in NPO$ και υπάρχουν δυο αλγόριθμοι A, B, πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

1. Για ένα στιγμιότυπο (S, f, N) του Π_{LS} ο αλγόριθμος A επιστρέφει μια λύση $s \in S$.

Ορισμός PLS

Ορισμός

Έστω πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} και Π το αντίστοιχο πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Λέμε ότι το Π_{LS} ανήκει στην κλάση PLS αν $\Pi \in NPO$ και υπάρχουν δυο αλγόριθμοι A, B, πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

1. Για ένα στιγμιότυπο (S, f, N) του Π_{LS} ο αλγόριθμος A επιστρέφει μια λύση $s \in S$.
2. Για ένα στιγμιότυπο (S, f, N) του Π_{LS} και μια λύση s, ο αλγόριθμος B αποφασίζει αν η s είναι τοπικό βέλτιστο και, αν όχι, επιστρέφει μια γειτονική της λύση με καλύτερο κόστος.

Ορισμός PLS

Ορισμός

Έστω πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} και Π το αντίστοιχο πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Λέμε ότι το Π_{LS} ανήκει στην κλάση PLS αν $\Pi \in NPO$ και υπάρχουν δυο αλγόριθμοι A, B, πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

1. Για ένα στιγμιότυπο (S, f, N) του Π_{LS} ο αλγόριθμος A επιστρέφει μια λύση $s \in S$.
2. Για ένα στιγμιότυπο (S, f, N) του Π_{LS} και μια λύση s, ο αλγόριθμος B αποφασίζει αν η s είναι τοπικό βέλτιστο και, αν όχι, επιστρέφει μια γειτονική της λύση με καλύτερο κόστος.

- Προσέξτε ότι παρ' ότι η κλάση ονομάζεται **Polynomial-time Local Search**, το «polynomial» αναφέρεται στους αλγορίθμους A, B του ορισμού και όχι στο χρόνο επίλυσης του προβλήματος. (μπορεί να απαιτείται εκθετικός αριθμός επαναλήψεων).

Αναγωγές PLS (I)

- Θα ορίσουμε αναγωγές μεταξύ των προβλημάτων της κλάσης, για να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Αναγωγές PLS (I)

- Θα ορίσουμε αναγωγές μεταξύ των προβλημάτων της κλάσης, για να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Ορισμός

Λέμε ότι το πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} είναι PLS-reducible σε ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π'_{LS} ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS}$) αν υπάρχουν δυο αλγόριθμοι ϕ_1 και ϕ_2 πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

Αναγωγές PLS (I)

- Θα ορίσουμε αναγωγές μεταξύ των προβλημάτων της κλάσης, για να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Ορισμός

Λέμε ότι το πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} είναι PLS-reducible σε ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π'_{LS} ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS}$) αν υπάρχουν δυο αλγόριθμοι ϕ_1 και ϕ_2 πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

- Ο αλγόριθμος ϕ_1 μετατρέπει ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_{LS} σε στιγμιότυπο $\phi_1(I)$ του προβλήματος Π'_{LS}.

Αναγωγές PLS (I)

- Θα ορίσουμε αναγωγές μεταξύ των προβλημάτων της κλάσης, για να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Ορισμός

Λέμε ότι το πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} είναι PLS-reducible σε ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π'_{LS} ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS}$) αν υπάρχουν δυο αλγόριθμοι ϕ_1 και ϕ_2 πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

- Ο αλγόριθμος ϕ_1 μετατρέπει ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_{LS} σε στιγμιότυπο $\phi_1(I)$ του προβλήματος Π'_{LS}.
- Ο αλγόριθμος ϕ_2 αντιστοιχίζει ένα στιγμιότυπο $I = (S, f, N)$ του Π_{LS} και μια λύση $s' \in S'$ με $\phi_1(I) = (S', f', N')$ με μια λύση $s \in S$.

Αναγωγές PLS (I)

- Θα ορίσουμε αναγωγές μεταξύ των προβλημάτων της κλάσης, για να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Ορισμός

Λέμε ότι το πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} είναι PLS-reducible σε ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π'_{LS} ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS}$) αν υπάρχουν δυο αλγόριθμοι ϕ_1 και ϕ_2 πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:

- Ο αλγόριθμος ϕ_1 μετατρέπει ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_{LS} σε στιγμιότυπο $\phi_1(I)$ του προβλήματος Π'_{LS}.
- Ο αλγόριθμος ϕ_2 αντιστοιχίζει ένα στιγμιότυπο $I = (S, f, N)$ του Π_{LS} και μια λύση $s' \in S'$ με $\phi_1(I) = (S', f', N')$ με μια λύση $s \in S$.
- Για ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_{LS}, αν $s' \in S'$ τοπικό ελάχιστο για το $\phi_1(I) = (S', f', N')$, τότε το $\phi_2(I, s')$ είναι τοπικό ελάχιστο για το I.

Το ζεύγος (ϕ_1, ϕ_2) καλείται **PLS-reduction** (PLS-αναγωγή).

Αναγωγές PLS (II)

- Παρατηρήστε από τον ορισμό, ότι αν $\Pi_{ls} \propto \Pi'_{LS}$ και το Π'_{LS} έχει αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, το ίδιο ισχύει και για το Π_{LS}. (Το Π'_{LS} είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το Π_{LS}).

Αναγωγές PLS (II)

- Παρατηρήστε από τον ορισμό, ότι αν $\Pi_{ls} \propto \Pi'_{LS}$ και το Π'_{LS} έχει αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, το ίδιο ισχύει και για το Π_{LS}. (Το Π'_{LS} είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το Π_{LS}).
- Οι PLS-αναγωγές, είναι μεταβατικές. ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS} \wedge \Pi'_{LS} \propto \Pi''_{LS} \Rightarrow \Pi_{LS} \propto \Pi''_{LS}$)

Ορισμός

Ένα πρόβλημα $\Pi_{LS} \in PLS$ καλείται **PLS-πλήρες** αν για κάθε $\Pi'_{LS} \in PLS$ ισχύει $\Pi'_{LS} \propto \Pi_{LS}$.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (I)

Θεώρημα

$PLS \subseteq NPO$

Απόδειξη.

- Έστω $\Pi_{LS} \in PLS$. Το κωδικοποιούμε σαν πρόβλημα $\Pi \in NPO$:

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (I)

Θεώρημα

$PLS \subseteq NPO$

Απόδειξη.

- Έστω $\Pi_{LS} \in PLS$. Το κωδικοποιούμε σαν πρόβλημα $\Pi \in NPO$:
- Για κάθε στιγμιότυπο $(S, f, N) \in \Pi_{LS}$ ορίζουμε ένα στιγμιότυπο $(S, f') \in \Pi$ χρησιμοποιώντας για f' τη συνάρτηση $f' : S \to \{0, 1\}$ για την οποία $f'(s) = 0$ αν το s είναι τοπικό βέλτιστο και $f'(s) = 1$ αλλιώς.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (I)

Θεώρημα

$PLS \subseteq NPO$

Απόδειξη.

- Έστω $\Pi_{LS} \in PLS$. Το κωδικοποιούμε σαν πρόβλημα $\Pi \in NPO$:
- Για κάθε στιγμιότυπο $(S, f, N) \in \Pi_{LS}$ ορίζουμε ένα στιγμιότυπο $(S, f') \in \Pi$ χρησιμοποιώντας για f' τη συνάρτηση $f' : S \to \{0, 1\}$ για την οποία $f'(s) = 0$ αν το s είναι τοπικό βέλτιστο και $f'(s) = 1$ αλλιώς.
- Από τον ορισμό της PLS υπάρχει αλγόριθμος (B) που αποφασίζει σε πολ. χρόνο αν μια λύση είναι τοπικό ελάχιστο για το Π_{LS}. Άρα και η f' μπορεί να τρέξει σε πολ. χρόνο.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (I)

Θεώρημα

$PLS \subseteq NPO$

Απόδειξη.

- Έστω $\Pi_{LS} \in PLS$. Το κωδικοποιούμε σαν πρόβλημα $\Pi \in NPO$:
- Για κάθε στιγμιότυπο $(S, f, N) \in \Pi_{LS}$ ορίζουμε ένα στιγμιότυπο $(S, f') \in \Pi$ χρησιμοποιώντας για f' τη συνάρτηση $f' : S \to \{0, 1\}$ για την οποία $f'(s) = 0$ αν το s είναι τοπικό βέλτιστο και $f'(s) = 1$ αλλιώς.
- Από τον ορισμό της PLS υπάρχει αλγόριθμος (B) που αποφασίζει σε πολ. χρόνο αν μια λύση είναι τοπικό ελάχιστο για το Π_{LS}. Άρα και η f' μπορεί να τρέξει σε πολ. χρόνο.
- Έτσι Π_{LS} και Π ισοδύναμα και $\Pi \in NPO$.

$\square$

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (II)

Θεώρημα

$PO \subseteq PLS$

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (II)

Θεώρημα

$PO \subseteq PLS$

- Με αντίστοιχη απόδειξη.

Έτσι:

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (II)

Θεώρημα

$PO \subseteq PLS$

- Με αντίστοιχη απόδειξη.

Έτσι:

Θεώρημα

$PO \subseteq PLS \subseteq NPO$

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (III)

Θεώρημα

Αν $NP \neq co-NP$, τότε κανένα από τα προβλήματα στην PLS δεν είναι NP-hard.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $\Pi_{LS} \in PLS$ που είναι NP-hard. Θα δείξουμε ότι αυτό αντιτίθεται στην περίπτωση $NP \neq co-NP$, δείχνοντας ότι για κάθε πρόβλημα απόφασης $\Pi_D \in NP$ συνεπάγεται ότι το συμπληρωματικό του, Π_D^c, ανήκει επίσης στην NP.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (III)

Θεώρημα

Αν $NP \neq co-NP$, τότε κανένα από τα προβλήματα στην PLS δεν είναι NP-hard.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $\Pi_{LS} \in PLS$ που είναι NP-hard. Θα δείξουμε ότι αυτό αντιτίθεται στην περίπτωση $NP \neq co-NP$, δείχνοντας ότι για κάθε πρόβλημα απόφασης $\Pi_D \in NP$ συνεπάγεται ότι το συμπληρωματικό του, Π_D^c, ανήκει επίσης στην NP.

- Το Π_{LS} είναι NP-hard, άρα υπάρχει πολ. χρόνου αλγόριθμος A που αποφασίζει το Π_D, χρησιμοποιώντας ένα μαντείο που βρίσκει τοπικά βέλτιστα για στιγμιότυπα του Π_{LS}.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Άρα αν μας δοθεί η ακολουθία από τοπικά βέλτιστα που επιστρέφει το μαντείο του A κατά την εκτέλεσή του στο στιγμιότυπο I του Π_D, μπορούμε σε πολ. χρόνο να αποφασίσουμε αν το I είναι ένα ναι ή όχι-στιγμιότυπο του Π_D.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Άρα αν μας δοθεί η ακολουθία από τοπικά βέλτιστα που επιστρέφει το μαντείο του A κατά την εκτέλεσή του στο στιγμιότυπο I του Π_D, μπορούμε σε πολ. χρόνο να αποφασίσουμε αν το I είναι ένα ναι ή όχι-στιγμιότυπο του Π_D.
- Άρα αυτή η ακολουθία είναι ένα πιστοποιητικό, πολυωνυμικού μεγέθους, για ναι-στιγμιότυπα του Π_D^c.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Άρα αν μας δοθεί η ακολουθία από τοπικά βέλτιστα που επιστρέφει το μαντείο του A κατά την εκτέλεσή του στο στιγμιότυπο I του Π_D, μπορούμε σε πολ. χρόνο να αποφασίσουμε αν το I είναι ένα ναι ή όχι-στιγμιότυπο του Π_D.
- Άρα αυτή η ακολουθία είναι ένα πιστοποιητικό, πολυωνυμικού μεγέθους, για ναι-στιγμιότυπα του Π_D^c.
- Το πιστοποιητικό, μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για ορθότητα, αντικαθιστώντας κάθε κλήση στο μαντείο στον A με μια πολυωνυμικού χρόνου διαδικασία που ελέγχει κατά πόσον η συγκεκριμένη λύση στο πιστοποιητικό είναι μια λύση στο στιγμιότυπο του Π_{LS} που δίνεται στον προφήτη.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Άρα αν μας δοθεί η ακολουθία από τοπικά βέλτιστα που επιστρέφει το μαντείο του A κατά την εκτέλεσή του στο στιγμιότυπο I του Π_D, μπορούμε σε πολ. χρόνο να αποφασίσουμε αν το I είναι ένα ναι ή όχι-στιγμιότυπο του Π_D.
- Άρα αυτή η ακολουθία είναι ένα πιστοποιητικό, πολυωνυμικού μεγέθους, για ναι-στιγμιότυπα του Π_D^c.
- Το πιστοποιητικό, μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για ορθότητα, αντικαθιστώντας κάθε κλήση στο μαντείο στον A με μια πολυωνυμικού χρόνου διαδικασία που ελέγχει κατά πόσον η συγκεκριμένη λύση στο πιστοποιητικό είναι μια λύση στο στιγμιότυπο του Π_{LS} που δίνεται στον προφήτη.
- Αλλά εξ' ορισμού της PLS ένας τέτοιος αλγόριθμος υπάρχει.

Συσχετισμός PLS με PO και NPO (IV)

Απόδειξη (cont.)

- Άρα αν μας δοθεί η ακολουθία από τοπικά βέλτιστα που επιστρέφει το μαντείο του A κατά την εκτέλεσή του στο στιγμιότυπο I του Π_D, μπορούμε σε πολ. χρόνο να αποφασίσουμε αν το I είναι ένα ναι ή όχι-στιγμιότυπο του Π_D.
- Άρα αυτή η ακολουθία είναι ένα πιστοποιητικό, πολυωνυμικού μεγέθους, για ναι-στιγμιότυπα του Π_D^c.
- Το πιστοποιητικό, μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για ορθότητα, αντικαθιστώντας κάθε κλήση στο μαντείο στον A με μια πολυωνυμικού χρόνου διαδικασία που ελέγχει κατά πόσον η συγκεκριμένη λύση στο πιστοποιητικό είναι μια λύση στο στιγμιότυπο του Π_{LS} που δίνεται στον προφήτη.
- Αλλά εξ' ορισμού της PLS ένας τέτοιος αλγόριθμος υπάρχει.
- Άρα $\Pi_D^c \in NP$.

$\square$

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (I)

Ορισμός

Για ένα *Boolean* κύκλωμα D με n κόμβους εισόδου $\{x_1, \ldots, x_n\}$ και κόμβους εξόδου $\{y_1, \ldots, y_m\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση γειτνίασης flip ως εξής:

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (I)

Ορισμός

Για ένα *Boolean* κύκλωμα D με n κόμβους εισόδου $\{x_1, ..., x_n\}$ και κόμβους εξόδου $\{y_1, ..., y_m\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση γειτνίασης flip ως εξής:

- Το πεδίο τιμών (σύνολο των λύσεων) είναι όλα τα πιθανά διανύσματα εισόδου του κυκλώματος.

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (I)

Ορισμός

Για ένα *Boolean* κύκλωμα D με n κόμβους εισόδου $\{x_1, \ldots, x_n\}$ και κόμβους εξόδου $\{y_1, \ldots, y_m\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση γειτνίασης flip ως εξής:

- Το πεδίο τιμών (σύνολο των λύσεων) είναι όλα τα πιθανά διανύσματα εισόδου του κυκλώματος.
- Δυο λύσεις s, s' είναι γειτονικές, αν η απόστασή τους κατά Hamming είναι ένα.

Το ζητούμενο είναι μια λύση $\hat{s}$ που να αποτελεί τοπικό βέλτιστο για τη συνάρτηση κόστους: $f(\hat{s}) = \sum_{i=1}^{m} 2^{i-1} y_i$.

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (Ι)

Ορισμός

Για ένα *Boolean* κύκλωμα D με n κόμβους εισόδου $\{x_1, \dots, x_n\}$ και κόμβους εξόδου $\{y_1, \dots, y_m\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση γειτνίασης flip ως εξής:

- Το πεδίο τιμών (σύνολο των λύσεων) είναι όλα τα πιθανά διανύσματα εισόδου του κυκλώματος.
- Δυο λύσεις s, s' είναι γειτονικές, αν η απόστασή τους κατά Hamming είναι ένα.

Το ζητούμενο είναι μια λύση $\hat{s}$ που να αποτελεί τοπικό βέλτιστο για τη συνάρτηση κόστους: $f(\hat{s}) = \sum_{i=1}^{m} 2^{i-1} y_i$.

Στο **MIN-CIRCUIT/flip** στόχος είναι η εύρεση τοπικών ελαχίστων, ενώ στο **MAX-CIRCUIT/flip** η εύρεση τοπικών μεγίστων.

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (II)

Θεώρημα

Τα MIN-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip είναι PLS-πλήρη.

Διαδικασία (πάνω πάνω):

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (II)

Θεώρημα

Τα MIN-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip είναι PLS-πλήρη.

Διαδικασία (πάνω πάνω):

- Δείχνουμε ότι MIN-CIRCUIT/flip $\propto$ MAX-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip $\propto$ MIN-CIRCUIT/flip

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (II)

Θεώρημα

Τα MIN-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip είναι PLS-πλήρη.

Διαδικασία (πάνω πάνω):

- Δείχνουμε ότι MIN-CIRCUIT/flip $\propto$ MAX-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip $\propto$ MIN-CIRCUIT/flip
- Για κάθε $\Pi_{LS} \in PLS$ πρόβλημα ελαχιστοποίησης δείχνουμε ότι $\Pi_{LS} \propto$ MIN-CIRCUIT/flip και για $\Pi LS'$ πρόβλημα μεγιστοποίησης ότι $\Pi'_{LS} \propto$ MAX-CIRCUIT/flip.

Πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα (II)

Θεώρημα

Τα MIN-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip είναι PLS-πλήρη.

Διαδικασία (πάνω πάνω):

- Δείχνουμε ότι MIN-CIRCUIT/flip $\propto$ MAX-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip $\propto$ MIN-CIRCUIT/flip
- Για κάθε $\Pi_{LS} \in PLS$ πρόβλημα ελαχιστοποίησης δείχνουμε ότι $\Pi_{LS} \propto$ MIN-CIRCUIT/flip και για $\Pi LS'$ πρόβλημα μεγιστοποίησης ότι $\Pi'_{LS} \propto$ MAX-CIRCUIT/flip.
- Χρησιμοποιούμε το θεώρημα που λέει ότι για πολ. υπολογίσιμη δυαδική συνάρτηση f υπάρχει πολ. χρόνου αλγόριθμος που κατασκευάζει κύκλωμα σταθερού μεγέθους εισόδου n που υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης για οποιαδήποτε είσοδο με n ψηφία.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (Ι)

Θεώρημα

Το πρόβλημα της εύρεσης μιας αγνής ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο δυναμικού, όπου ο αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης λειτουργεί σε πολυωνυμικό χρόνο, είναι PLS-πλήρες.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (I)

Θεώρημα

Το πρόβλημα της εύρεσης μιας αγνής ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο δυναμικού, όπου ο αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης λειτουργεί σε πολυωνυμικό χρόνο, είναι PLS-πλήρες.

Απόδειξη

- Εύκολα βλέπουμε ότι αν Γ παίγνιο δυναμικού, $\Gamma \in PLS$.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (I)

Θεώρημα

Το πρόβλημα της εύρεσης μιας αγνής ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο δυναμικού, όπου ο αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης λειτουργεί σε πολυωνυμικό χρόνο, είναι PLS-πλήρες.

Απόδειξη

- Εύκολα βλέπουμε ότι αν Γ παίγνιο δυναμικού, $\Gamma \in PLS$.
- Θα δείξουμε ότι WIGHTED SAT $\propto$ ΕΥΡΕΣΗ ΑΓΝΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ NASH ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΥΜΦΟΡΗΣΗΣ

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (I)

Θεώρημα

Το πρόβλημα της εύρεσης μιας αγνής ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο δυναμικού, όπου ο αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης λειτουργεί σε πολυωνυμικό χρόνο, είναι PLS-πλήρες.

Απόδειξη

- Εύκολα βλέπουμε ότι αν Γ παίγνιο δυναμικού, $\Gamma \in PLS$.
- Θα δείξουμε ότι WIGHTED SAT $\propto$ ΕΥΡΕΣΗ ΑΓΝΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ NASH ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΥΜΦΟΡΗΣΗΣ
- Έστω στιγμιότυπο WEIGHTED SAT με μεταβλητές $x_1, x_2, .., x_k$ και προτάσεις $C_i, C_2, ..., C_n$ με βάρος w_j για κάθε πρόταση C_j.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (II)

Απόδειξη (cont.)

- Κατασκευάζουμε παίγνιο συμφόρησης $(N, E, (\Sigma_i)_{i \in N}, (f_e)_{e \in E})$ ως εξής:

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (II)

Απόδειξη (cont.)

- Κατασκευάζουμε παίγνιο συμφόρησης $(N, E, (\Sigma_i)_{i\in N}, (f_e)_{e\in E})$ ως εξής:
- Για κάθε μεταβλητή έχουμε έναν παίκτη. Άρα το σύνολο N αποτελείται από k παίκτες.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (II)

Απόδειξη (cont.)

- Κατασκευάζουμε παίγνιο συμφόρησης $(N, E, (\Sigma_i)_{i \in N}, (f_e)_{e \in E})$ ως εξής:
- Για κάθε μεταβλητή έχουμε έναν παίκτη. Άρα το σύνολο N αποτελείται από k παίκτες.
- Για κάθε πρόταση έχουμε έναν πόρο. Άρα το σύνολο E αποτελείται από n πόρους.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (II)

Απόδειξη (cont.)

- Κατασκευάζουμε παίγνιο συμφόρησης $(N, E, (\Sigma_i)_{i \in N}, (f_e)_{e \in E})$ ως εξής:
- Για κάθε μεταβλητή έχουμε έναν παίκτη. Άρα το σύνολο N αποτελείται από k παίκτες.
- Για κάθε πρόταση έχουμε έναν πόρο. Άρα το σύνολο E αποτελείται από n πόρους.
- Κάθε παίκτης i (μεταβλητή x_i) έχει δυο στρατηγικές.
  1. Να διαλέξει το σύνολο πόρων S_i που είναι οι αντίστοιχοι πόροι των προτάσεων που περιέχουν το x_i (αντιστοιχεί στο να θέσουμε $x_i = 0$) ή
  2. το $\hat{S}_i$ που είναι οι αντίστοιχοι πόροι των προτάσεων που περιέχουν το $\hat{x}_i$.(αντιστοιχεί στο να θέσουμε $x_i = 1$

αυτό μοντελοποιεί την ανάθεση τιμής της μεταβλητής x_i. Έτσι ορίσαμε το Σ_i.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (III)

Απόδειξη (cont).

- Η συνάρτηση κόστους f_j του κόμβου j που αντιστοιχεί στην πρόταση C_j ορίζεται ως εξής: $f_j(\xi) = 0$ αν $\xi < k_j$ και $f_j(k_j) = w_j$ όπου k_j το πλήθος των μεταβλητών της πρότασης C_j. (προβλ. ελαχιστοποίησης)

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (III)

Απόδειξη (cont).

- Η συνάρτηση κόστους f_j του κόμβου j που αντιστοιχεί στην πρόταση C_j ορίζεται ως εξής: $f_j(\xi) = 0$ αν $\xi < k_j$ και $f_j(k_j) = w_j$ όπου k_j το πλήθος των μεταβλητών της πρότασης C_j. (προβλ. ελαχιστοποίησης)
- Η συνάρτηση δυναμικού που για μια κατάσταση s ορίζεται ως $\Phi(s) = \sum_j f_j(\xi_j)$ όπου ξ_j ο αριθμός των μεταβλητών με λογική τιμή 0 στην πρόταση C_j - το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τον αντίστοιχο πόρο.

PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης (III)

Απόδειξη (cont).

- Η συνάρτηση κόστους f_j του κόμβου j που αντιστοιχεί στην πρόταση C_j ορίζεται ως εξής: $f_j(\xi) = 0$ αν $\xi < k_j$ και $f_j(k_j) = w_j$ όπου k_j το πλήθος των μεταβλητών της πρότασης C_j. (προβλ. ελαχιστοποίησης)
- Η συνάρτηση δυναμικού που για μια κατάσταση s ορίζεται ως $\Phi(s) = \sum_j f_j(\xi_j)$ όπου ξ_j ο αριθμός των μεταβλητών με λογική τιμή 0 στην πρόταση C_j - το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τον αντίστοιχο πόρο.
- Έτσι η παραπάνω συνάρτηση δυναμικού ισοδυναμεί με το βάρος της αντίστοιχης τιμοδοσίας s στο αντίστοιχο πρόβλημα WEIGHTED SAT.

□

Βιβλιογραφία

W. Michiels, E.H.L. Aarts, and J.H.M.Korst
Theoretical aspects of local search.
Springer, 2007.

S. Parsons.
Algorithmic Game Theory by noam nisan, tim roughgarden, éva tardos and vijay v. vazirani.
Cambridge university press, 2011

A.A. Schaffer and M. Yannakakis.
Simple local search problems that are hard to solve
SIAM J, 1991

A. Fabrikant, C.H. Papadimitriou, and K. Talwar.
The complexity of pure nash equilibria
In Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Chicago, IL, USA, June13-16,2004, pages604–612, 2004.