

Αυτόματα και Τυπικές Γραμματικές

1η σειρά ασκήσεων

Στάθης Ζάχος

1. Αποδείξτε με επαγωγή: $\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\sum_{i=0}^n i\right)^2$

2. Έστω a, b φυσικοί αριθμοί και έστω $\max(a, b)$ ο μέγιστος εξ αυτών.

Ισχυρισμός: $[P(n)]: n = \max(a, b) \implies (a = n \wedge b = n)$

Απόδειξη με επαγωγή

• $P(0): 0 = \max(a, b) \implies a = 0 \wedge b = 0$, προφανώς

• $P(n) \implies P(n+1)$

Η υπόθεση είναι $n = \max(a, b)$. Ορίζουμε $a' = a - 1, b' = b - 1$.

Προφανώς, $\max(a', b') = n - 1$.

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση: $a' = n - 1 \wedge b' = n - 1$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των a', b' προκύπτει $a = n \wedge b = n$, ο.ε.δ.

Πού είναι το λάθος στην παραπάνω απόδειξη;

3. Οι συμβολοακολουθίες με ισορροπημένες παρενθέσεις μπορούν να οριστούν με δύο τρόπους:

Μία συμβολοσειρά $w \in \{(\,)\}^*$ είναι ισορροπημένη ανν:

- (α)
- 1) w έχει ίσο πλήθος «(» και «)»
 - 2) κάθε πρόθεμα της w έχει τουλάχιστον τόσα «(» όσα «)»
- (β)
- 1) $\eta \in$ είναι ισορροπημένη
 - 2) αν ηw είναι ισορροπημένη, τότε είναι και $\eta(w)$
 - 3) αν οι w, x ισορροπημένες τότε είναι και ηwx
 - 4) τίποτε άλλο δεν είναι ισορροπημένη συμβολοσειρά

Αποδείξτε με επαγωγή ότι οι ορισμοί (α) και (β) ορίζουν την ίδια κλάση συμβολοσειρών.

4. Δείξτε ότι το ακόλουθο είναι μία σχέση ισοδυναμίας και δώστε τις κλάσεις ισοδυναμίας:

R είναι μία σχέση με ανθρώπους ορισμένη με $p R q$ ανν οι p και q έχουν γεννηθεί την ίδια ώρα της ίδιας μέρας του ίδιου έτους.

5. Βρείτε το μεταβατικό κλείσιμο, το ανακλαστικό και μεταβατικό κλείσιμο και το συμμετρικό κλείσιμο της σχέσης $\{(a, b), (b, c), (c, d), (f, d)\}$

6. Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των ακεραίων είναι αριθμήσιμα άπειρο.

7. Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών από φυσικούς αριθμούς είναι αριθμήσιμα άπειρο.