

Αυτόματα και Τυπικές Γραμματικές
5η σειρά ασκήσεων
Στάθης Ζάχος

1. Έστω κανονικό σύνολο L . Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι κανονικά; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α) $\{a_1a_3a_5 \dots a_{2n-1} \mid a_1a_2a_3 \dots a_{2n} \in L\}$

β) $\{a_2a_1a_4a_3 \dots a_{2n}a_{2n-1} \mid a_1a_2a_3 \dots a_{2n} \in L\}$

γ) $\text{Cycle}(L) = \{w_1w_2 \mid w_1w_2 \in L, w_1, w_2: \text{strings}\}$

δ) $\text{max}(L) = \{x \in L \mid \text{δεν υπάρχει } y \neq \varepsilon \text{ με } xy \in L\}$

ε) $\text{min}(L) = \{x \in L \mid \text{δεν υπάρχει πρόθεμα του } x \text{ που να είναι στην } L\}$

στ) $\text{init}(L) = \{x \in L \mid \text{για κάποιο } y, xy \in L\}$

ζ) $L^R = \{x \mid x^R \in L\}$

η) $\{x \mid xx^R \in L\}$

2. Ποια η σχέση μεταξύ της κλάσης των κανονικών συνόλων και της ελάχιστης κλάσης γλωσσών κλειστής ως προς την ένωση, την τομή και το συμπλήρωμα που περιέχει όλα τα πεπερασμένα σύνολα.

3. Έστω k ομομορφισμός: $k(a) = 10, k(b) = 01$.

α) $L = (a + ba)^*, k(L) = ?$

β) $L = (10 + 0)^*1^*, k^{-1}(L) = ?$

γ) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{ίσο πλήθος } 0 \text{ και } 1 \text{ στην } w\}, k^{-1}(L) = ?$

4. Ένα σύνολο καλείται co-finite αν το συμπλήρωμά του είναι πεπερασμένο (finite). Δώστε αλγόριθμο που αποκρίνεται αν το $L(M)$, όπου M : πεπερασμένο αυτόματο, είναι co-finite ή όχι. Δικαιολογήστε τον αλγόριθμο.

5. Αποδείξτε ή ανταποδείξτε: $L_1 = L_2$, όπου:

$$L_1 = b^* + b^*a(b + ab^*a)^*ab^* \quad \text{και} \quad L_2 = (b^*ab^*a)^*b^*$$

6. (**) Έστω M : DFA και $L = L(M)$. Δείξτε ότι R_L και R_M είναι σχέσεις ισοδυναμίας. Πώς οι R_L, R_M σχετίζονται μεταξύ τους;

7. Κατασκευάστε c.f. γραμματικές που να παράγουν:

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \# a \text{ στην } w \neq \# b \text{ στην } w\}$

$L_2 = \{a^ib^j \mid i \neq j, i, j \geq 0\}$

$L_3 = \text{σύνολο συμβολοσειρών με ισορροπημένες παρενθέσεις}$

$L_4 = \text{σύνολο εκφράσεων Pascal (Pascal expressions)}$

$L_5 = \text{σύνολο LOOP προγραμμάτων}$

8. (**) Δείξτε χρησιμοποιώντας το θεώρημα Myhill-Nerode ότι η γλώσσα $\{a^ib^j \mid 1 \leq i \leq j\}$ δεν είναι κανονική.