Μοντέλα Υπολογισμού
Πρωταρχικές αναδρομικές συναρτήσεις
Στάθης Ζάχος

1. Δείξε τυπικά ότι οι $\mathrm{add}(x,y)$, $\mathrm{mult}(x,y)$, $\mathrm{div}(x,y)$ είναι πρωταρχικές αναδρομικές.

2. Δείξε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι πρωταρχικές αναδρομικές:

   - $\mathrm{not}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
   - $\mathrm{or}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \text{ ή } y > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
   - $\mathrm{and}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \text{ και } y > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
   - $\mathrm{impl}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } y > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
   - $\mathrm{less}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x < y \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
   - $\mathrm{eq}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = y \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
   - $\mathrm{superexp}(x,y) = x^{x^{\cdots^{x}}}$ (y φορές)
   - $\max(x,y) = \begin{cases} x, & \text{αν } x > y \\ y, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

3. Δείξε ότι η $\mathcal{P}$ είναι κλειστή ως προς $f(x,z) = \sum_{y=0}^{z} g(x,y)$.

4. Επαλήθευσε με αξιωματική σημασιολογία την ορθότητα του εξής προγράμματος LOOP:

   ① $x := 1$; ② **for** $w := 1$ **to** y **do** ③ $x := x + x$ ④ **end** ⑤

5. Κατασκεύασε αποτελεσματική απαρίθμηση όλων των προγραμμάτων LOOP.

6. Κατασκεύασε αποτελεσματική απαρίθμηση όλων των πρωταρχικών αναδρομικών συναρτήσεων.

7. Όρισε την κλάση των πρωταρχικών αναδρομικών συναρτήσεων από το Σ^* στο Σ^* (όπου Σ: πεπερασμένο αλφάβητο) κωδικοποιώντας τις συμβολοσειρές με φυσικούς αριθμούς.

8. α. Όρισε την κλάση των πρωταρχικών αναδρομικών συναρτήσεων από το Σ^* στο Σ^* χρησιμοποιώντας αρχικές συναρτήσεις και σχήματα κλεισίματος (ανάλογα με τα S, P, …, σύνθεση, πρωταρχική αναδρομή).

   β. Το ίδιο με LOOP string προγράμματα.

9. Δείξε ότι οι ορισμοί στις προηγούμενες δύο ασκήσεις είναι ισοδύναμοι.