Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα 7ου εξαμήνου ΣΗΜΜΥ
http://www.corelab.ece.ntua.gr/courses/algorithms/
http://moodle.softlab.ntua.gr
Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής (Τομέας Computer Science ΣΗΜΜΥ)

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Άσκηση 1

a. Υπολογίστε χωρίς χρήση του master theorem τη συνάρτηση $T(n)$ που ορίζεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$T(1) = 7$$
$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + 11n$$

b. Η πολυπλοκότητα τριών αλγορίθμων για το ίδιο πρόβλημα δίνεται από τις επόμενες αναδρομικές σχέσεις:

$$T_1(n) = 5T_1\left(\frac{n}{5}\right) + (x+1)\frac{n}{\log n}$$
$$T_2(n) = 2T_2\left(\frac{n}{4}\right) + (y+1)\,n^2\sqrt{n}$$
$$T_3(n) = T_3(n-1) + \frac{(z+1)}{n}$$

όπου x, y, z είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας αντίστοιχα. Ταξινομήστε τους αλγορίθμους ως προς την αποδοτικότητά τους. Ποιοι από αυτούς χρησιμοποιούν τη μέθοδο divide & conquer; Εξηγήστε.

Άσκηση 2

Ταξινομήστε τις επόμενες συναρτήσεις κατά σειρά τάξης μεγέθους από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη. Βρείτε δηλαδή διάταξη $g_1, g_2, g_3, \ldots$ τέτοια ώστε $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, κ.ό.κ.

2^{2^n}	$n!$
$n2^n$	$n-7$
$n\log n$	$\log^{z-1} n$
$\log(4n^{x+3})$	$\frac{n}{\log n}$
$\frac{n^{y+1}}{\log^{z+1} n}$	$\frac{(\log n)}{n^y}$
$3n^{z+2}-7$	e^n

x, y, z είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας αντίστοιχα. Επισημάνετε τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους ($g_i = \Theta(g_j)$).

Άσκηση 3

Σε ένα δένδρο T χωρίς προκαθορισμένη ρίζα ένας κόμβος λέγεται $1/k$ separator αν μετά την αφαίρεσή του, οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν μέγεθος το πολύ n/k, όπου n ο αριθμός των κόμβων του δένδρου.

a. Δείξτε ότι σε κάθε δένδρο υπάρχει $1/2$ separator.

b. Δείξτε ότι αν σε ένα δένδρο υπάρχει $1/k$ separator (υποθέτοντας $k < n$) τότε υπάρχει κόμβος με βαθμό τουλάχιστον k. Εξετάστε αν ισχύει και το αντίστροφο.

c. Βρείτε αλγόριθμο που αποφαίνεται αν ένα δένδρο έχει $1/(x+3)$ separator, όπου x το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και υπολογίστε την πολυπλοκότητά του.

Άσκηση 4

a. Για το επόμενο σύνολο αριθμών, εκτελέστε τα στάδια κατασκευής σωρού για τους δύο αλγορίθμους heap combine και heap insert:

$$\{x, y, z, w, 14, 5, 6, 15, 8, 7, 6, 1, 3\}$$

x, y, z, w είναι τα τέσσερα τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Τα στάδια εκτέλεσης πρέπει να φαίνονται μόνο γραφικά.

b. Πόσα βήματα χρειάζεται ο αλγόριθμος heapsort για να ταξινομήσει ένα διάνυσμα με:

(a) ήδη ταξινομημένα στοιχεία κατά αύξουσα σειρά;

(b) ήδη ταξινομημένα στοιχεία κατα φθίνουσα σειρά;

Δείξτε ότι στη χειρότερη περίπτωση ο αλγόριθμος heapsort έχει πολυπλοκότητα $\Omega(n \log n)$.

Άσκηση 5

Σε έναν κατευθυνόμενο γράφο, ένας κόμβος με indegree μηδέν λέγεται πηγή.

a. Αποδείξτε ότι σε κάθε ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφο υπάρχει τουλάχιστον μία πηγή.

b. Δείξτε ότι ένας κατευθυνόμενος γράφος με n κόμβους είναι ακυκλικός αν και μόνο αν μπορούμε να τοποθετήσουμε ετικέτες $1, 2, \ldots, n$ στους κόμβους ώστε όλες οι ακμές να κατευθύνονται από κόμβο με μικρότερη ετικέτα σε κόμβο με μεγαλύτερη ετικέτα.

c. Περιγράψτε πολυωνυμικό αλγόριθμο που να αποφαίνεται αν ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι ακυκλικός.

*Άσκηση 6

a. Στην όχθη ενός ποταμού βρίσκονται ένας λύκος, ένα πρόβατο κι ένα καφάσι με μαρούλια. Υπάρχει μόνο μια βάρκα, η οποία εκτός από το βαρκάρη μπορεί να μεταφέρει μόνο ένα από τα προηγούμενα κάθε φορά. Όταν ο βαρκάρης είναι παρών τότε επικρατεί ασφάλεια στο σύστημα. Παρόλα αυτά όταν απουσιάζει, κάποια από τα παραπάνω μπορούν το ένα να φάει το άλλο. Συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

- Αν ο λύκος και το πρόβατο μείνουν αφύλακτα στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το καφάσι με τα μαρούλια, ο λύκος μπορεί να φάει το πρόβατο.
- Αν το πρόβατο μείνει αφύλακτο μαζί με τα μαρούλια στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το λύκο, το πρόβατο θα φάει τα μαρούλια.

Βρείτε έναν τρόπο ώστε να καταφέρει ο βαρκάρης να τα μεταφέρει και τα τρία άθικτα στην απέναντι όχθη.

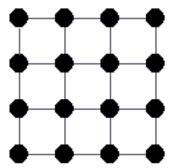
b. Γενικεύοντας, έστω ότι υπάρχουν n αντικείμενα $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, τα οποία ο βαρκάρης επιθυμεί να περάσει στην απέναντι όχθη. Δίνεται γι' αυτά ένας γράφος ασυμβατοτήτων, του οποίου οι κορυφές είναι τα n αντικείμενα και το x_i συνδέεται με το x_j όταν τα x_i και x_j δεν επιτρέπεται να μείνουν αφύλακτα μαζί στην ίδια όχθη (δηλαδή όταν κάποιο από τα δύο μπορεί να φάει το άλλο).

Βρείτε ποιά πρέπει να είναι τουλάχιστον η χωρητικότητα της βάρκας ώστε το πρόβλημα να λύνεται όταν ο γράφος ασυμβατοτήτων είναι:

- αλυσίδα (chain) P_n,
- δακτύλιος (ring) C_n,
- αστέρι (star) S_n,
- ο πλήρης γράφος K_n,
- πλέγμα (grid) διαστάσεων $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$,

Πόσες φορές πρέπει ο βαρκάρης να διασχίσει τον ποταμό σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις; Δώστε μέθοδο λύσης.

***c.** Δείξτε ότι αν η βάρκα έχει χωρητικότητα μικρότερη από το ελάχιστο Vertex Cover του γράφου ασυμβατοτήτων, τότε το πρόβλημα δε λύνεται.



Πλέγμα διαστάσεων 4×4

Βοηθητικός Ορισμός

Πλέγμα (grid) διαστάσεων $m \times n$ είναι ο γράφος $G(V, E)$, με $V = \{(i, j) : i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots n\}$ και $E = \{((i, j), (i', j')) : |i - i'| + |j - j'| = 1\}$

Να παραδοθούν μέχρι την 15-12-2007