Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα 7ου εξαμήνου ΣΗΜΜΥ
http://www.corelab.ece.ntua.gr/courses/algorithms/
http://moodle.softlab.ntua.gr
Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής (Τομέας Computer Science ΣΗΜΜΥ)

3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Άσκηση 1

Ένας οδηγός αποφασίζει να κάνει ένα ταξίδι από την πόλη X μέχρι την πόλη Y με το αυτοκίνητό του, το οποίο έχει αυτονομία κίνησης ως προς τη βενζίνη που μπορεί να αποθηκεύσει, k χιλιόμετρα. Αν ο οδηγός διαθέτει χάρτη στον οποίο αναφέρονται όλα τα βενζινάδικα της διαδρομής με τις αποστάσεις τους και επιπλέον επιθυμεί να πραγματοποιήσει όσο το δυνατό λιγότερες στάσεις, πώς πρέπει να προγραμματίσει τον ανεφοδιασμό καυσίμων; Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου που επινοήσατε.

Σημείωση: δεν υπάρχει ζεύγος διαδοχικών βενζινάδικων που να απέχουν μεταξύ τους πάνω από k χιλιόμετρα.

Άσκηση 2

Έστω $X = (x_1, \ldots, x_n)$ μία ακολουθία n θετικών πραγματικών αριθμών. Το σύνολο των δεικτών $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ονομάζεται *ανεξάρτητο* αν $|i - j| > 1$ για κάθε δύο δείκτες $i, j \in I$, δηλαδή το I δεν περιέχει δύο διαδοχικούς αριθμούς.

Το *βάρος* ενός συνόλου $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ είναι το άθροισμα των αντίστοιχων x_i: $W(J) = \sum_{i \in J} x_i$.

Ένα ανεξάρτητο σύνολο I ονομάζεται *μέγιστο* αν $W(I) \geq W(J)$ για κάθε ανεξάρτητο σύνολο J.

Στόχος είναι να βρούμε ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο για μία δοθείσα ακολουθία X.

1. Έστω ότι χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο άπληστο αλγόριθμο για το πρόβλημα: αρχικά $I = \emptyset$ και $J = \{1, \ldots, n\}$. Όσο το J έχει στοιχεία, μεταφέρουμε το δείκτη $j \in J$ με τη μεγαλύτερη τιμή x_j στο I και αφαιρούμε από το J τους δείκτες $j - 1$, j και $j + 1$. Το αποτέλεσμα είναι το σύνολο I.

(a) Βρείτε ένα παράδειγμα μικρής ακολουθίας θετικών αριθμών για το οποίο ο παραπάνω άπληστος αλγόριθμος δεν παράγει τη βέλτιστη λύση.

(b) Αποδείξτε ότι αυτός ο άπληστος αλγόριθμος βρίσκει ένα ανεξάρτητο σύνολο I του οποίου το βάρος είναι τουλάχιστον το μισό από το βάρος του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου.

2. Αποδείξτε ότι για το πρόβλημα αυτό ισχύει η αρχή της βελτιστότητας και δώστε μία αναδρομική συνάρτηση που να συνδέει τη βέλτιστη λύση ενός στιγμιότυπου με τη βέλτιστη λύση υποπροβλημάτων του. Δώστε αρχικές τιμές για τη συνάρτηση αυτή.

3. Χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό, κατασκευάστε έναν αλγόριθμο που να επιλύει το πρόβλημα σε χρόνο $\Theta(n)$.

Άσκηση 3

Κάποιος ισχυρίζεται οτι παρόλο που ο αλγόριθμος Dijkstra δε δουλεύει για κατευθυνόμενους γράφους με αρνητικά βάρη, μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να δίνει σωστά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα αν v είναι η ακμή με το ελάχιστο βάρος (αρνητικό), προτείνει να προσθέσουμε σε όλες τις ακμές βάρος $|w(v)|$ ώστε να αποκτήσουν όλες οι ακμές θετικό βάρος. Στη συνέχεια προτείνει να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Dijkstra ως έχει. Εξηγήστε αν η παραπάνω σκέψη λύνει το single-source πρόβλημα σωστά, δίνοντας απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 4

Δίνονται τα μη κενά κλειστά διαστήματα υποσύνολα των πραγματικών $[s_1, t_1], [s_2, t_2], \ldots, [s_n, t_n]$. Δύο διαστήματα λέγονται φωλιασμένα αν και μόνο αν το ένα είναι υποσύνολο του άλλου.

1. Βρείτε αποδοτικό αλγόριθμο που εξετάζει αν υπάρχουν φωλιασμένα διαστήματα. Ποια είναι η πολυπλοκότητά του;

2. Μπορείτε να βελτιώσετε την πολυπλοκότητα αν γνωρίζετε ότι τα s_i και τα t_i είναι ακέραιοι αριθμοί με τιμές στο $[0, \ldots, \kappa n]$, $\kappa \in \mathbb{N}$ σταθερά.

Άσκηση 5: Πολλαπλασιασμός divide & conquer

1. Δείξτε πώς μπορούν να πολλαπλασιαστούν δύο γραμμικά πολυώνυμα $ax + b$ και $cx + d$ χρησιμοποιώντας μόνο 3 πολλαπλασιασμούς.

2. Δώστε έναν divide & conquer αλγόριθμο για πολλαπλασιασμό πολυωνύμων βαθμού n με πολυπλοκότητα χρόνου $\Theta(n^{\log 3})$.

   Υπόδειξη: βρείτε έναν τρόπο να ομαδοποιήσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου (π.χ. σε υψηλής και χαμηλής τάξης, ή ανάλογα με το αν ο αντίστοιχος εκθέτης είναι περιττός ή άρτιος) ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η ιδέα του προηγούμενου ερωτήματος.

Να παραδοθούν μέχρι την 10-01-2008