Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα 7ου εξαμήνου ΣΗΜΜΥ
http://www.corelab.ece.ntua.gr/courses/algorithms/
http://moodle.softlab.ntua.gr
Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής (Τομέας Computer Science ΣΗΜΜΥ)

1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Άσκηση 1: Πρόβλημα Βασιλισσών. Λατινικά και Μαγικά Τετράγωνα.

a. Σε μια σκακιέρα 4×4 τοποθετήστε 4 βασίλισσες που να μην αλληλοαπειλούνται (Μέθοδος Οπισθοδρόμησης). Πόσες ουσιαστικά διαφορετικές λύσεις υπάρχουν;

b. Το ίδιο για σκακιέρα 5×5 με 5 βασίλισσες.

c. Η επιφάνεια που δημιουργείται, αν ταυτίσουμε αφενός την πάνω με την κάτω πλευρά αφετέρου την δεξιά με την αριστερή πλευρά της σκακιέρας λέγεται τόρος. Δεν υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν 4 βασίλισσες στην τορο-σκακιέρα 4×4 που να μην αλληλο-απειλούνται. Υπάρχει (ουσιαστικά μόνο ένας) τρόπος να τοποθετηθούν 5 βασίλισσες στην τορο-σκακιέρα 5×5 ώστε να μην αλληλοαπειλούνται.

d. Σε ένα πίνακα 5×5 τοποθετήστε τα γράμματα a, b, c, d, e (ένα σε κάθε τετραγωνάκι) έτσι ώστε σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο (και τοροειδώς) να έχουμε διαφορετικά γράμματα.

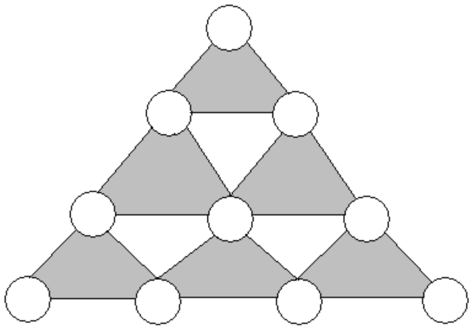
e. Τοποθετήστε τώρα στον πίνακα 5×5 συνδυασμούς των λατινικών γραμμάτων a, b, c, d, e και των ελληνικών γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του προηγούμενου ερωτήματος για τα λατινικά και τα ελληνικά, και επιπλέον να μην έχουμε τον ίδιο συνδυασμό δύο φορές (αυτό λέγεται λατινικό τετράγωνο).

f. Αν θέσουμε $a = \alpha = 0$, $b = \beta = 1$, $\gamma = \gamma = 2$, $d = \delta = 3$, $e = \epsilon = 4$ και διαβάσουμε το συνδυασμό ψηφίων στο πενταδικό σύστημα (π.χ. $b\delta = 13_5 = 8$), τότε έχουμε ένα μαγικό τόρο (τοροειδές τετράγωνο). Δηλαδή, εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί από 0 έως 24 έτσι ώστε τα αθροίσματα σε στήλες, γραμμές και (τοροειδείς) διαγωνίους να είναι ίσα. Ελέξτε το.

g. Δοκιμάστε να βρείτε αλγοριθμικό κανόνα για την κατασκευή μαγικού τόρου 5×5. Σημειωτέον ότι δεν υπάρχει μαγικό τετράγωνο 2×2, υπάρχει 3×3, 4×4, 6×6, 8×8, 9×9 αλλά δεν υπάρχει μαγικός τόρος. Υπάρχει όμως μαγικός τόρος 5×5, 7×7, 11×11 (και πολλοί 13×13). Τι σχέση υπάρχει μεταξύ των τριών προβλημάτων (όλα σε τόρο): Βασιλισσών-Λατινικών τετραγώνων-Μαγικών τετραγώνων;

Άσκηση 2: Γραμμοσκιασμένα Τρίγωνα

Να τοποθετηθούν οι αριθμοί $0, 1, \ldots, 9$ στα κυκλάκια, ούτως ώστε τα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα να έχουν το ίδιο άθροισμα.



Άσκηση 3

Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων:

a. Ο γράφος είναι δένδρο.

b. Ο γράφος είναι συνεκτικός με $n-1$ ακμές.

c. Ο γράφος έχει $n-1$ ακμές και δεν έχει κύκλους.

d. Αφαιρώντας μια οποιαδήποτε ακμή, ο γράφος από συνεκτικός γίνεται μη συνεκτικός.

e. Κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με ακριβώς ένα απλό μονοπάτι.

f. Ο γράφος δεν έχει κύκλους αλλά η πρόσθεση οποιασδήποτε νέας ακμής δημιουργεί κύκλο.

Άσκηση 4

VERTEX COVER ενός μη κατευθυνόμενου γράφου G ονομάζεται ένα σύνολο κόμβων, ώστε κάθε ακμή του G να έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο σύνολο αυτό. Δείξτε ότι ένας γράφος περιέχει VERTEX COVER μεγέθους k αν και μόνο αν ο συμπληρωματικός του έχει CLIQUE μεγέθους $n-k$.

Άσκηση 5

Ολική καταβόθρα σε ένα κατευθυνόμενο γράφο λέγεται μια κορυφή που δεν έχει επόμενες κορυφές και υπάρχει ακμή από κάθε άλλη κορυφή προς αυτή. Για αναπαράσταση του γράφου με πίνακα γειτνίασης επινοήστε όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμο που βρίσκει μια ολική καταβόθρα ή αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει. Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

Άσκηση 6

Ορίζουμε το εξής παιχνίδι: Έχουμε ένα τυχαίο μη κατευθυνόμενο γράφο και δύο χρώματα στη διάθεσή μας, μπλε και κόκκινο. Στην αρχή του παιχνιδιού θεωρούμε ότι όλες οι κορυφές είναι βαμμένες με μπλε χρώμα. Ο παίκτης σε κάθε βήμα μπορεί να χτυπήσει οποιαδήποτε κορυφή του γράφου και τότε η κορυφή αυτή και οι γειτονικές της αλλάζουν χρώμα (μπλε $\rightarrow$ κόκκινο, κόκκινο $\rightarrow$ μπλε). Σκοπός του παιχνιδιού είναι να χρωματιστούν όλες οι κορυφές του γράφου με κόκκινο χρώμα.

a. Δείξτε ότι ο παίκτης δε χρειάζεται να χτυπήσει κάθε κορυφή πάνω από δύο φορές.

b. Δείξτε ότι δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία ο παίκτης χτυπάει τις κορυφές.

Από τα δύο παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι για να υπάρξει κάποια λύση, αρκεί να βρούμε ένα κατάλληλο υποσύνολο των κορυφών και στη συνέχεια ο παίκτης να πατήσει μόνο αυτές σε τυχαία σειρά.

c. Για μια αλυσίδα, είναι δυνατόν να χρωματιστούν όλες οι κορυφές κόκκινες; Για κύκλο;

d. Για ένα πλήρες δυαδικό δέντρο;

e. Γενικεύστε το προηγούμενο ερώτημα για πλήρη δέντρα με n φύλλα.

f. Για γράφο της μορφής $K_{n,n}$;

g. Πόσες διαφορετικές λύσεις υπάρχουν για γράφους της μορφής K_n; Θεωρούμε πως για την κάθε λύση χτυπάμε το πολύ μία φορά κάθε κορυφή και δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τις χτυπάμε

h. * Για πλέγμα $n \times n$ (π.χ. 5×5);

i. *** Μπορεί να βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος για τυχαίο γράφο;

Να παραδοθούν μέχρι την 16-10-2008