

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Άσκηση 1

- a. Υπολογίστε χωρίς χρήση του master theorem τη συνάρτηση $T(n)$ που ορίζεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$T(1) = 7$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + 11n$$

- b. Η πολυπλοκότητα τριών αλγορίθμων για το ίδιο πρόβλημα δίνεται από τις επόμενες αναδρομικές σχέσεις:

$$T_1(n) = 5T_1\left(\frac{n}{5}\right) + (x+1)\frac{n}{\log n}$$

$$T_2(n) = 2T_2\left(\frac{n}{4}\right) + (y+1)n^2\sqrt{n}$$

$$T_3(n) = T_3(n-1) + \frac{(z+1)}{n}$$

όπου x, y, z είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας αντίστοιχα. Ταξινομήστε τους αλγορίθμους ως προς την αποδοτικότητά τους. Ποιοι από αυτούς χρησιμοποιούν τη μέθοδο divide & conquer; Εξηγήστε.

Άσκηση 2

Ταξινομήστε τις επόμενες συναρτήσεις κατά σειρά τάξης μεγέθους από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη. Βρείτε δηλαδή διάταξη g_1, g_2, g_3, \dots τέτοια ώστε $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, κ.ό.κ.

2^{2^n}	$n!$
$n2^n$	$n - 7$
$n \log n$	$\log^{z-1} n$
$\log(4n^{x+3})$	$\frac{n}{\log n}$
$\frac{n^{y+1}}{\log^{z+1} n}$	$\frac{(\log n)}{n^y}$
$3n^{z+2} - 7$	e^n

x, y, z είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας αντίστοιχα. Επισημάνετε τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους ($g_i = \Theta(g_j)$).

Άσκηση 3

Σε ένα δένδρο T χωρίς προκαθορισμένη ρίζα ένας κόμβος λέγεται $1/k$ separator αν μετά την αφαίρεσή του, οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν μέγεθος το πολύ n/k , όπου n ο αριθμός των κόμβων του δένδρου.

- Δείξτε ότι σε κάθε δένδρο υπάρχει $1/2$ separator.
- Δείξτε ότι αν σε ένα δένδρο υπάρχει $1/k$ separator (υποθέτοντας $k < n$) τότε υπάρχει κόμβος με βαθμό τουλάχιστον k . Εξετάστε αν ισχύει και το αντίστροφο.
- Βρείτε αλγόριθμο που αποφαινεται αν ένα δένδρο έχει $1/(x+3)$ separator, όπου x το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και υπολογίστε την πολυπλοκότητά του.

Άσκηση 4

- Για το επόμενο σύνολο αριθμών, εκτελέστε τα στάδια κατασκευής σωρού για τους δύο αλγορίθμους heap combine και heap insert:

$$\{x, y, z, w, 14, 5, 6, 15, 8, 7, 6, 1, 3\}$$

x, y, z, w είναι τα τέσσερα τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Δείξτε τα στάδια εκτέλεσης με σχήματα.

- Πόσα βήματα χρειάζεται ο αλγόριθμος heapsort για να ταξινομήσει ένα διάνυσμα με:
 - ήδη ταξινομημένα στοιχεία κατά αύξουσα σειρά;
 - ήδη ταξινομημένα στοιχεία κατα φθίνουσα σειρά;

Δείξτε ότι στη χειρότερη περίπτωση ο αλγόριθμος heapsort έχει πολυπλοκότητα $\Omega(n \log n)$.

Άσκηση 5

Σε έναν κατευθυνόμενο γράφο, ένας κόμβος με indegree μηδέν λέγεται πηγή.

- Αποδείξτε ότι σε κάθε ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφο υπάρχει τουλάχιστον μία πηγή.

- b. Δείξτε ότι ένας κατευθυνόμενος γράφος με n κόμβους είναι ακυκλικός αν και μόνο αν μπορούμε να τοποθετήσουμε ετικέτες $1, 2, \dots, n$ στους κόμβους ώστε όλες οι ακμές να κατευθύνονται από κόμβο με μικρότερη ετικέτα σε κόμβο με μεγαλύτερη ετικέτα.
- c. Περιγράψτε πολυωνυμικό αλγόριθμο που να αποφαινεται αν ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι ακυκλικός.

*Άσκηση 6

- a. Στην όχθη ενός ποταμού βρίσκονται ένας λύκος, ένα πρόβατο κι ένα καφάσι με μαρούλια. Υπάρχει μόνο μια βάρκα, η οποία εκτός από το βαρκάρη μπορεί να μεταφέρει μόνο ένα από τα προηγούμενα κάθε φορά. Όταν ο βαρκάρης είναι παρών τότε επικρατεί ασφάλεια στο σύστημα. Παρόλα αυτά όταν απουσιάζει, κάποια από τα παραπάνω μπορούν το ένα να φάει το άλλο. Συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:
- Αν ο λύκος και το πρόβατο μείνουν αφύλακτα στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το καφάσι με τα μαρούλια, ο λύκος μπορεί να φάει το πρόβατο.
 - Αν το πρόβατο μείνει αφύλακτο μαζί με τα μαρούλια στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το λύκο, το πρόβατο θα φάει τα μαρούλια.

Βρείτε έναν τρόπο ώστε να καταφέρει ο βαρκάρης να τα μεταφέρει και τα τρία άθικτα στην απέναντι όχθη.

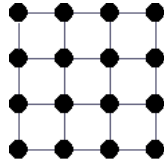
- b. Γενικεύοντας, έστω ότι υπάρχουν n αντικείμενα $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, τα οποία ο βαρκάρης επιθυμεί να περάσει στην απέναντι όχθη. Δίνεται γι' αυτά ένας γράφος ασυμβατοτήτων, του οποίου οι κορυφές είναι τα n αντικείμενα και το x_i συνδέεται με το x_j όταν τα x_i και x_j δεν επιτρέπεται να μείνουν αφύλακτα μαζί στην ίδια όχθη (δηλαδή όταν κάποιο από τα δύο μπορεί να φάει το άλλο).

Βρείτε ποιά πρέπει να είναι τουλάχιστον η χωρητικότητα της βάρκας ώστε το πρόβλημα να λύνεται όταν ο γράφος ασυμβατοτήτων είναι:

- αλυσίδα (chain) P_n ,
- δακτύλιος (ring) C_n ,
- αστέρι (star) S_n ,
- ο πλήρης γράφος K_n ,
- πλέγμα (grid) διαστάσεων $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$,

Πόσες φορές πρέπει ο βαρκάρης να διασχίσει τον ποταμό σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις; Δώστε μέθοδο λύσης.

- *c. Δείξτε ότι αν η βάρκα έχει χωρητικότητα μικρότερη από το ελάχιστο Vertex Cover του γράφου ασυμβατοτήτων, τότε το πρόβλημα δε λύνεται.



Πλέγμα διαστάσεων 4×4

Βοηθητικός Ορισμός

Πλέγμα (grid) διαστάσεων $m \times n$ είναι ο γράφος $G(V, E)$, με $V = \{(i, j) : i = 1 \dots m, j = 1 \dots n\}$ και $E = \{((i, j), (i', j')) : |i - i'| + |j - j'| = 1\}$

Να παραδοθούν μέχρι την 30-10-2008