Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα 7ου εξαμήνου ΣΗΜΜΥ
http://www.corelab.ece.ntua.gr/courses/algorithms/
http://moodle.softlab.ntua.gr/
Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής (Τομέας Computer Science ΣΗΜΜΥ)

4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Άσκηση 1

Αποδείξτε ότι οι κλάσεις **P** και **NP** είναι κλειστές ως προς ένωση και τομή. Δηλαδή, αν $L_1 \in \mathbf{P}$ και $L_2 \in \mathbf{P}$, τότε $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{P}$ και $L_1 \cap L_2 \in \mathbf{P}$ και ομοίως για την **NP**.

Υπόδειξη: Σχετικά με την κλάση **NP**, σκεφτείτε π.χ. γιατί το πρόβλημα του αν ένας γράφος έχει και κύκλο Hamilton και κλίκα μεγέθους $\geq k$ είναι στην **NP**.

Άσκηση 2

Υποθέτοντας ότι $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, δείξτε ότι αν μια κλάση A περιέχει την **NP** ($A \supset \mathbf{NP}$), τότε δεν υπάρχει A-πλήρες πρόβλημα (ως προς αναγωγή κατά Karp) που να λύνεται σε χρόνο $O(n^4)$.

Άσκηση 3

Δεδομένου ότι το πρόβλημα Vertex Cover είναι **NP**-πλήρες, αποδείξτε ότι και το πρόβλημα Independent Set είναι **NP**-πλήρες.

Άσκηση 4

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα Clique είναι **NP**-πλήρες, δίνοντας μία αναγωγή απευθείας από το SAT (προσοχή: όχι από το 3-SAT).

Άσκηση 5

Το πρόβλημα Longest Path (decision version) είναι το εξής: Δίνεται ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$, μια συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{N}$ κι ένας αριθμός k. Υπάρχει στον G μονοπάτι βάρους τουλάχιστον k;

Δείξτε ότι το πρόβλημα Longest Path είναι **NP**-Complete.

* Άσκηση 6

Δίνεται ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$ κι ένας αριθμός k. Ρωτάμε αν υπάρχει σύνολο $A \subseteq V$ πληθικότητας k τέτοιο ώστε ο υπογράφος του G περιορισμένος στο A να είναι κανονικός και μη κενός (δηλαδή όλες του οι κορυφές να έχουν τον ίδιο βαθμό $d \geq 1$).

Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι **NP**-Complete.

Άσκηση 7: Δίκτυα ταξινόμησης

a. Αποδείξτε ότι οποιοδήποτε δίκτυο ταξινόμησης με n εισόδους έχει βάθος τουλάχιστον $\log n$.

b. Αποδείξτε ότι ο αριθμός των συγκριτών σε οποιοδήποτε δίκτυο ταξινόμησης είναι τουλάχιστον $\Omega(n \log n)$.

(*)c. Αποδείξτε ότι ένα δίκτυο με συγκριτές με n εισόδους ταξινομεί σωστά την ακολουθία $\langle n, n-1, \ldots, 1\rangle$ αν και μόνο αν ταξινομεί σωστά τις $n-1$ 0-1 ακολουθίες $\langle 1, 0, 0, \ldots, 0, 0\rangle, \langle 1, 1, 0, \ldots, 0, 0\rangle, \ldots, \langle 1, 1, 1, \ldots, 1, 0\rangle$.

Να παραδοθούν μέχρι την 09/02/2009