Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Στάθης Ζάχος – Αρης Παγουρτζής

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Μερικές Βασικές Έννοιες

- Γράφοι
- Προβλήματα, Αλγόριθμοι, Πολυπλοκότητα
- Συμβολισμοί τάξης μεγέθους

Γράφοι (ή Γραφήματα)

Ορισμός. *Γράφος (ή γράφημα) G, ονομάζεται ένα διατεταγμένο ζεύγος συνόλων (V, E), όπου V είναι μη κενό σύνολο στοιχείων και E ένα σύνολο μη διατεταγμένων ζευγών του V, δηλαδή*

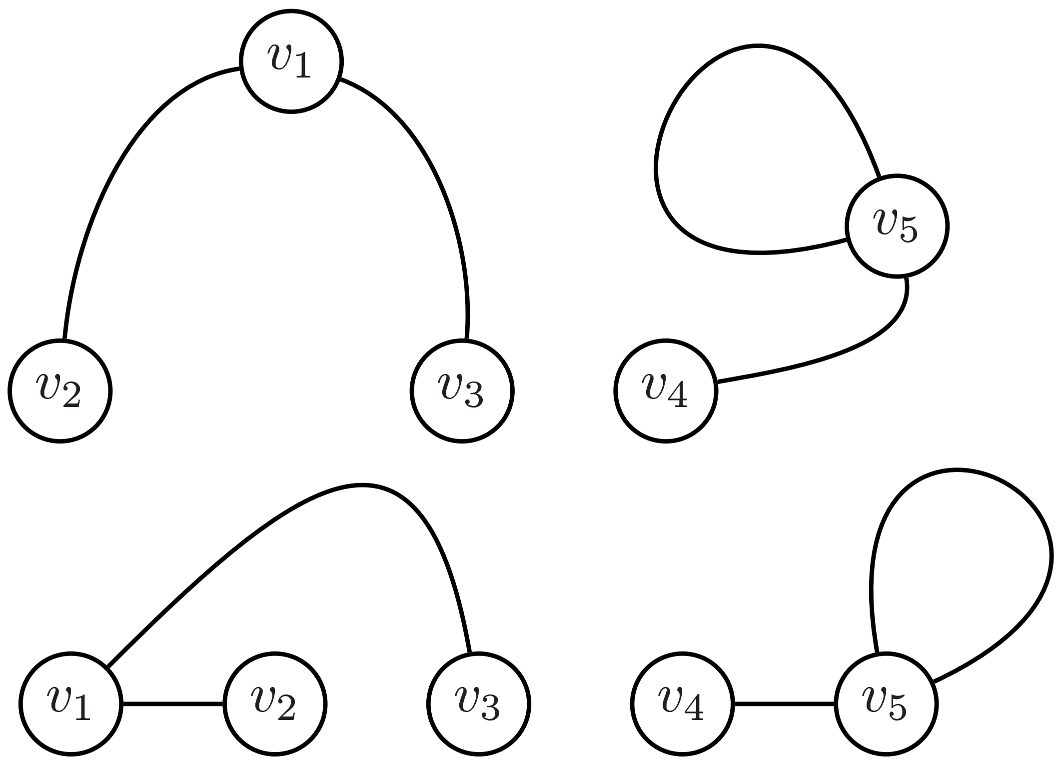
$$E \subseteq \binom{V}{2}$$

V: κορυφές (vertices) ή κόμβοι (nodes).

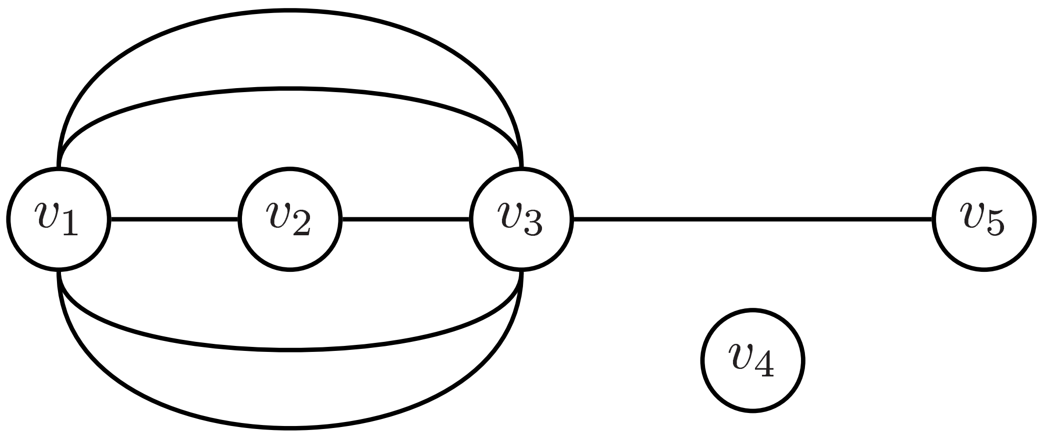
E: ακμές ή πλευρές (edges).

Παράδειγμα Γράφου

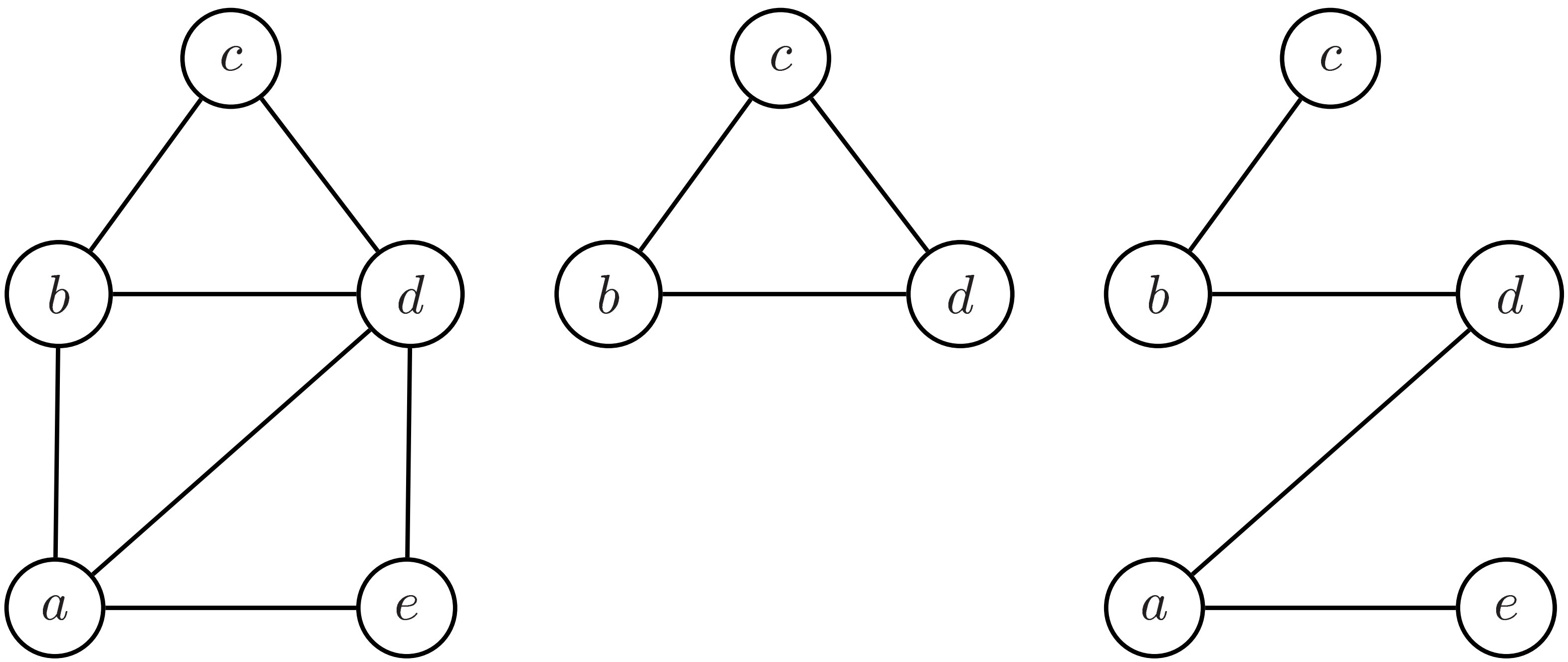
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_5\}\}$$



Πολυγράφημα



Υπογράφοι



Δρόμοι, μονοπάτια, κύκλοι

Δρόμος (walk): έγκυρη ακολουθία κορυφών-ακμών.

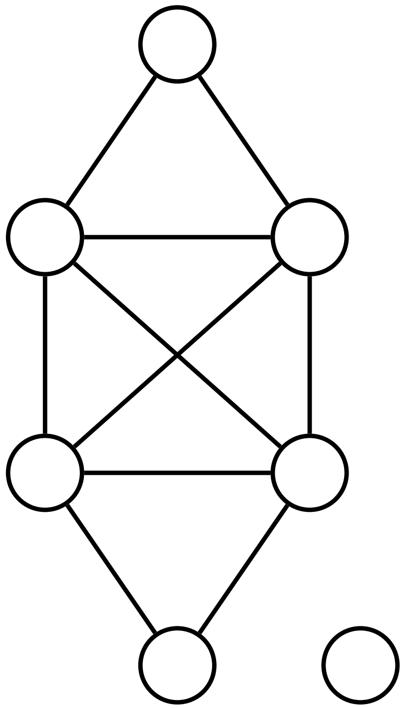
Μονοπάτι (path): δρόμος χωρίς επαναλήψεις ακμών.

Απλό μονοπάτι (simple path): μονοπάτι χωρίς επαναλήψεις κορυφών.

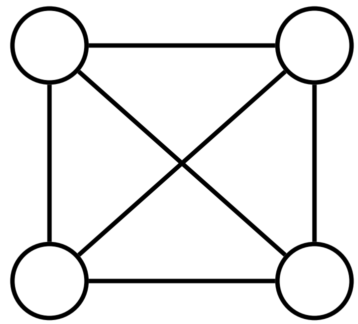
Κύκλος (cycle): κλειστό μονοπάτι. Απλός κύκλος: κλειστό απλό μονοπάτι.

Μήκος δρόμου: το πλήθος των ακμών του.

Γράφοι Euler, Hamilton



Γράφος Euler



Γράφος Hamilton

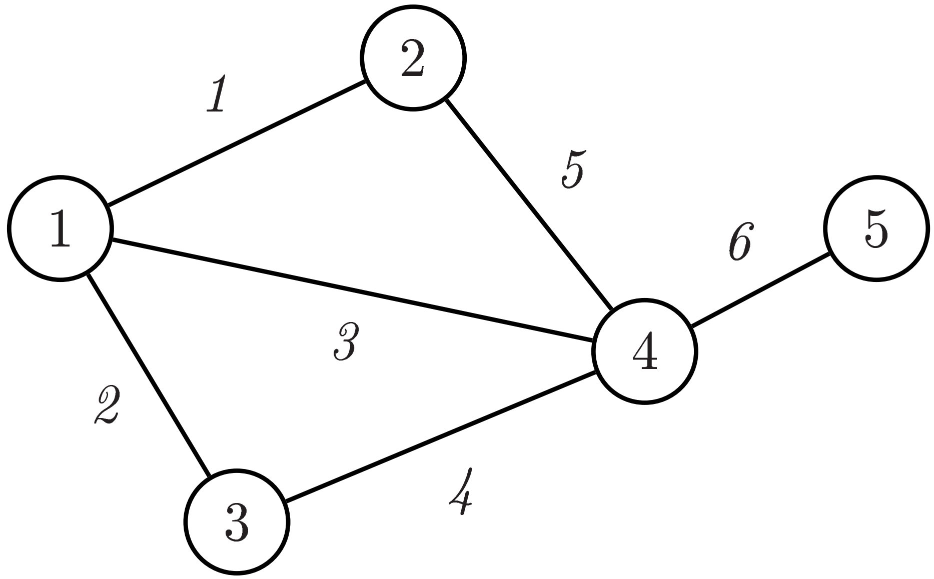
Παράσταση Γράφου

Πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix)

Πίνακας πρόσπτωσης (incidence matrix)

Λίστες γειτνίασης (adjacency lists): αποδοτική παράσταση σε αραιούς γράφους.

Παράσταση με λίστες γειτνίασης



$[1] \rightarrow \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$[2] \rightarrow \quad 1 \quad 4$

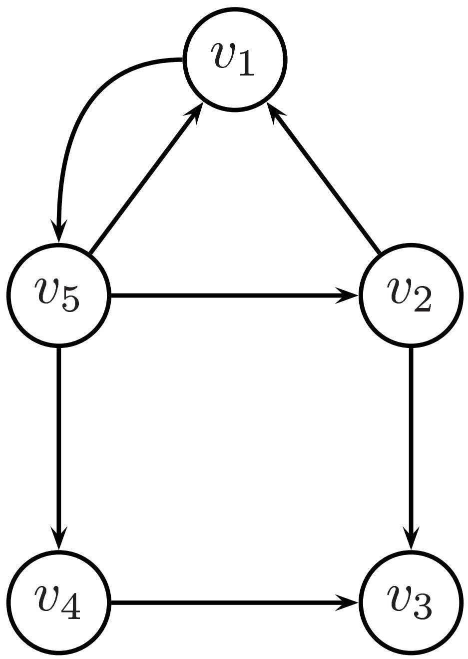
$[3] \rightarrow \quad 1 \quad 4$

$[4] \rightarrow \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5$

$[5] \rightarrow \quad 4$

Κατευθόμενος γράφος (directed graph)

$$E \subseteq V \times V$$



Αλλες έννοιες

Συνδεδεμένες κορυφές, παραγόμενος (induced) υπογράφος, συνεκτικές συνιστώσες (connected components).

Συνεκτικότητα (connectivity).

Κατευθυνόμενοι γράφοι: ισχυρή και ασθενής συνεκτικότητα.

Πλήρης γράφος (K_n), διμερής γράφος (πλήρης διμερής: $K_{n,m}$).

Επίπεδος γράφος (ανν δεν περιέχει K_5, $K_{3,3}$).

Δένδρα (trees).

Υπολογιστικά Προβλήματα

Υπολογιστικό πρόβλημα: καθορισμός αντιστοίχισης έγκυρων *δεδομένων εισόδου (στιγμιοτύπου)* σε *δεδομένα εξόδου (απαντήσεις / λύσεις)*.

Μαθηματική περιγραφή: σχέση (relation) μεταξύ συμβολοσειρών.

Παράδειγμα. Το πρόβλημα Satisfiability (SAT)

Προβλήματα απόφασης, προβλήματα βελτιστοποίησης.

Αλγόριθμος

Μηχανιστική διαδικασία παραγωγής απάντησης για κάθε έγκυρο στιγμιότυπο.

- Κάθε εκτέλεση είναι *πεπερασμένη*, δηλαδή τελειώνει ύστερα από έναν πεπερασμένο αριθμό διεργασιών ή βημάτων (*finiteness*).
- Κάθε κανόνας του ορίζεται επακριβώς και η αντίστοιχη διεργασία είναι συγκεκριμένη (*definiteness*).
- Έχει μηδέν ή περισσότερα μεγέθη *εισόδου* που δίδονται εξαρχής, πριν αρχίσει να εκτελείται ο αλγόριθμος (*input*).
- Δίδει τουλάχιστον ένα μέγεθος σαν αποτέλεσμα (*έξοδο-output*) που εξαρτάται κατά κάποιο τρόπο απ'τις αρχικές εισόδους.
- Είναι *μηχανιστικά* αποτελεσματικός, δηλαδή όλες οι διαδικασίες που περιλαμβάνει μπορούν να πραγματοποιηθούν με ακρίβεια και σε πεπερασμένο χρόνο «με μολύβι και χαρτί» (*effectiveness*).

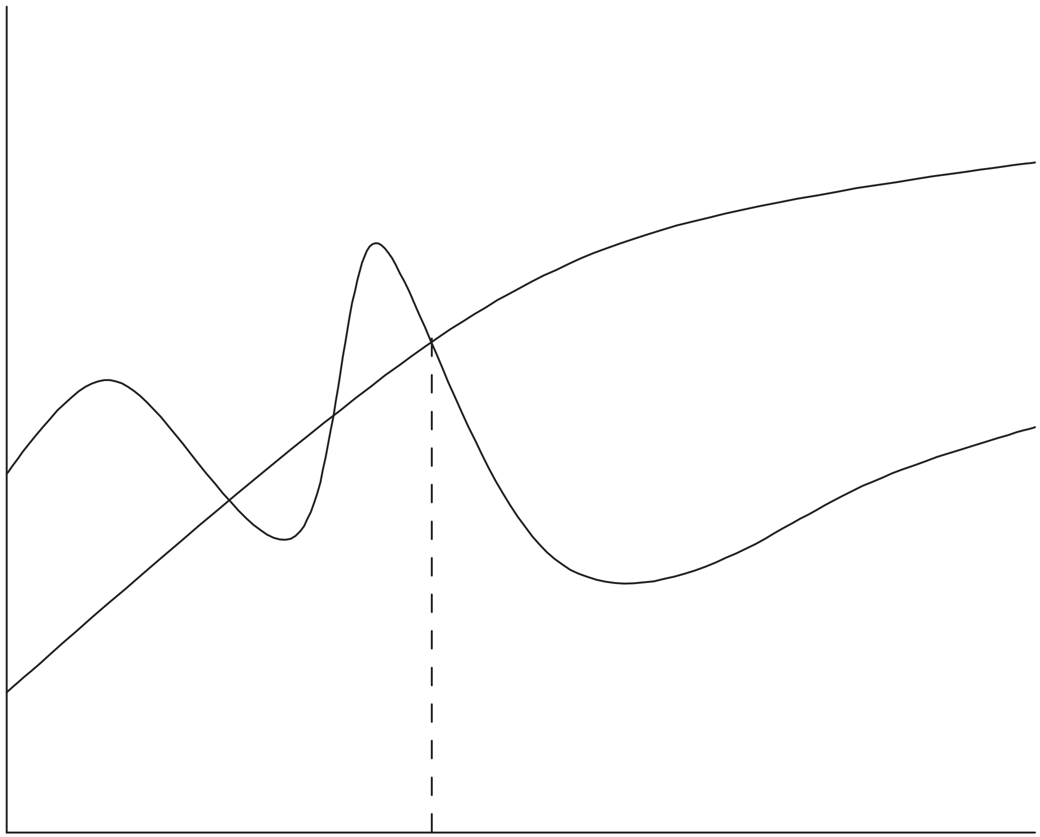
Πολυπλοκότητα Αλγορίθμου - Προβλήματος

Πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης

$$\text{κόστος αλγορίθμου } A(n) = \max_{\substack{\text{για όλες τις δυνα-}\\\text{τές εισόδους } x \text{ με-}\\\text{γέθους } n}} \{\text{κόστος αλγορίθμου } A \text{ για την είσοδο } x\}$$

$$\text{κόστος προβλήματος } (n) = \min_{\substack{\text{για όλους τους}\\\text{αλγόριθμους } A \text{ που}\\\text{επιλύουν το}\\\text{πρόβλημα}}} \{A(n)\}$$

Συμβολισμοί τάξης μεγέθους: συμβολισμός O



$$f = O(g)$$

Συμβολισμός O, o

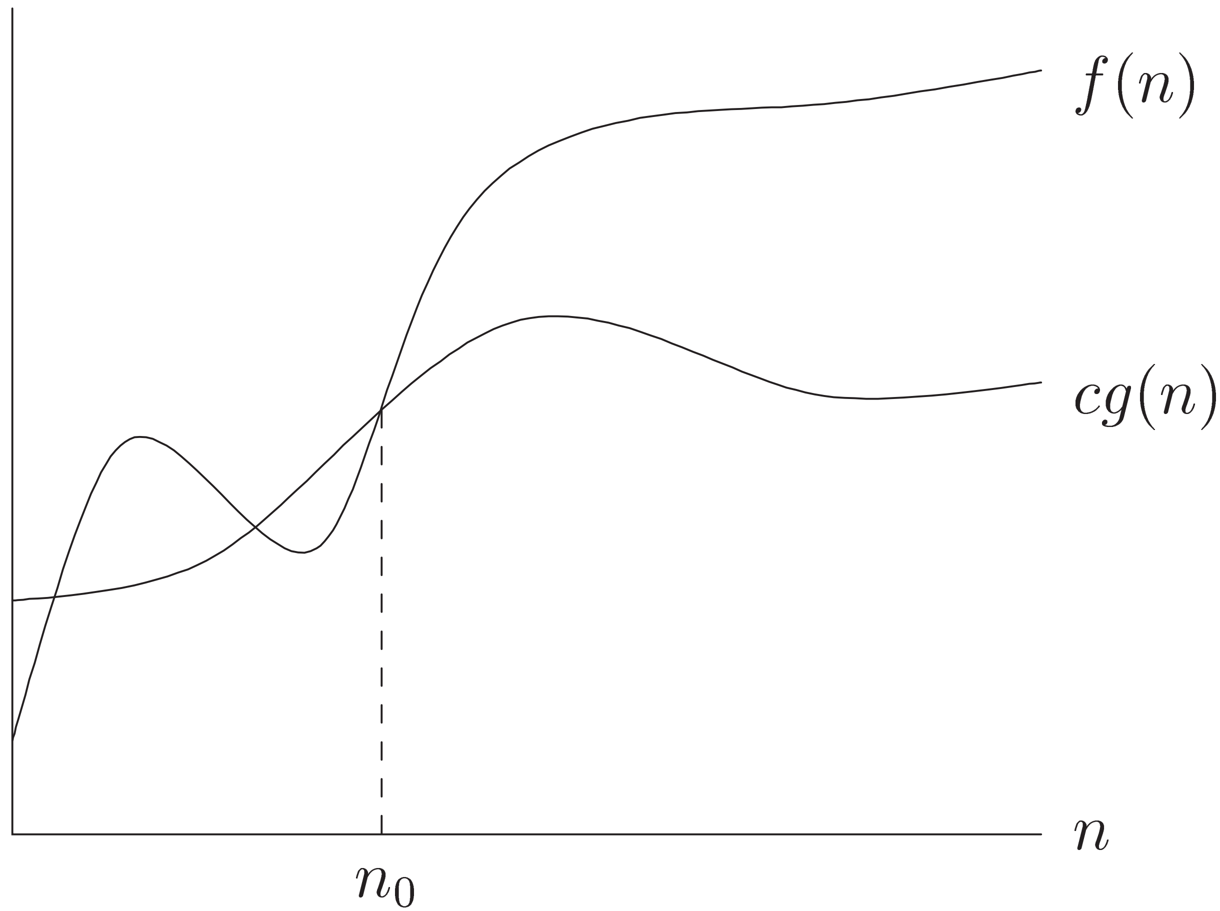
$$O(g) = \{f \mid \exists c > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; f(n) \leq cg(n)\}$$

$$o(g) = \{f \mid \forall c > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \;\; f(n) \leq cg(n)\}$$

ή

$$o(g) = \{f \mid \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0\}$$

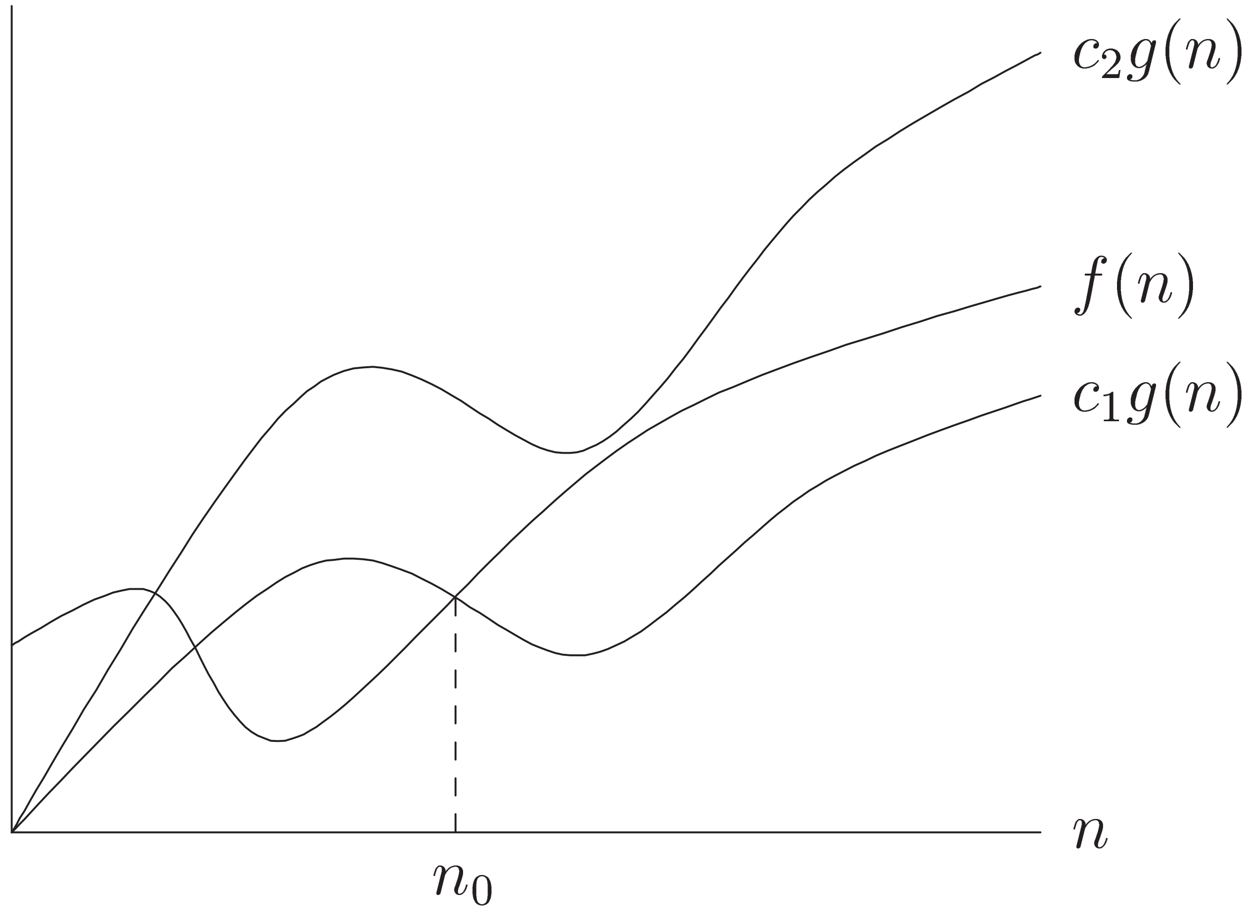
Συμβολισμός Ω, ω



$$\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ f(n) \geq cg(n)\}$$

$$\omega(g) = \{f \mid \forall c > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ f(n) \geq cg(n)\}$$

Συμβολισμός Θ



$$\Theta(g) = \{f \mid \exists c_1 > 0,\ \exists c_2 > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \ c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2\}$$

Ιεράρχηση

$$O(1) < O(\alpha(n)) < O(\log^* n)$$
$$< O(\log(n)) < O(\sqrt{n}) < O(n)$$
$$< O(n \log(n)) < O(n^2) < \ldots < O(poly)$$
$$< O(2^n) < O(n!) < O(n^n) < O(A(n))$$