Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

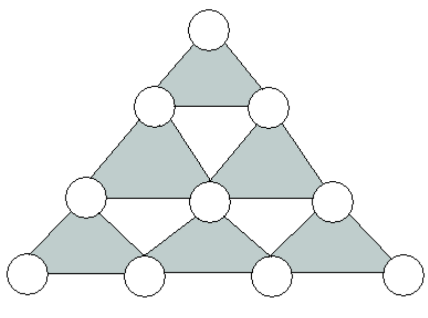
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 26/10/2009

Άσκηση 1: Πρόβλημα Βασιλισσών, Λατινικά και Μαγικά Τετράγωνα.

1. Σε μια σκακιέρα 4×4 τοποθετήστε 4 βασίλισσες που να μην αλληλοαπειλούνται. Πόσες ουσιαστικά διαφορετικές λύσεις υπάρχουν; Να επαναλάβετε για μια σκακιέρα 5×5 με 5 βασίλισσες.
2. Η επιφάνεια που δημιουργείται, αν ταυτίσουμε αφενός την πάνω με την κάτω πλευρά αφετέρου την δεξιά με την αριστερή πλευρά της σκακιέρας λέγεται τόρος. Δεν υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν 4 βασίλισσες στην τορο-σκακιέρα 4×4 που να μην αλληλοαπειλούνται. Υπάρχει (ουσιαστικά μόνο ένας) τρόπος να τοποθετηθούν 5 βασίλισσες στην τορο-σκακιέρα 5×5 ώστε να μην αλληλοαπειλούνται.
3. Σε ένα πίνακα 5×5 τοποθετήστε τα γράμματα a, b, c, d, e (ένα σε κάθε τετραγωνάκι) έτσι ώστε σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο (και τοροειδώς) να έχουμε διαφορετικά γράμματα.
4. Τοποθετήστε τώρα στον πίνακα 5×5 συνδυασμούς των λατινικών γραμμάτων a, b, c, d, e και των ελληνικών γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του προηγούμενου ερωτήματος για τα λατινικά και τα ελληνικά, και επιπλέον να μην έχουμε τον ίδιο συνδυασμό δύο φορές (αυτό λέγεται λατινικό τετράγωνο).
5. Αν θέσουμε $a = \alpha = 0$, $b = \beta = 1$, $c = \gamma = 2$, $d = \delta = 3$, $e = \epsilon = 4$ και διαβάσουμε το συνδυασμό ψηφίων στο πενταδικό σύστημα (π.χ. $b\delta = 13_5 = 8$), τότε έχουμε ένα μαγικό τόρο (τοροειδές τετράγωνο). Δηλαδή, εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί από 0 έως 24 έτσι ώστε τα αθροίσματα σε στήλες, γραμμές και (τοροειδείς) διαγωνίους να είναι ίσα. Ελέγξτε το.
6. Δοκιμάστε να βρείτε αλγοριθμικό κανόνα για την κατασκευή μαγικού τόρου 5×5. Σημειωτέον ότι δεν υπάρχει μαγικό τετράγωνο 2×2, υπάρχει 3×3, 4×4, 6×6, 8×8, 9×9 αλλά δεν υπάρχει μαγικός τόρος. Υπάρχει όμως μαγικός τόρος 5×5, 7×7, 11×11 (και πολλοί 13×13). Τι σχέση υπάρχει μεταξύ των τριών προβλημάτων (όλα σε τόρο): Βασιλισσών-Λατινικών τετραγώνων-Μαγικών τετραγώνων;

Άσκηση 2: Γραμμοσκιασμένα Τρίγωνα

Να τοποθετηθούν οι αριθμοί $0, 1, \ldots, 9$ στους κύκλους του διπλανού σχήματας, ώστε τα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα να έχουν το ίδιο άθροισμα.



Άσκηση 3: Ιδιότητες Δέντρων

Έστω γράφημα G με n κορυφές. Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων:

1. Το G είναι δένδρο.
2. Το G είναι συνεκτικό και έχει $n-1$ ακμές.
3. Το G έχει $n-1$ ακμές και δεν έχει κύκλους.
4. Το G είναι συνεκτικό, και αν αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ακμή, το G καθίσταται μη συνεκτικό (δηλ. το G είναι ελαχιστοτικά συνεκτικό).
5. Κάθε ζεύγος κορυφών του G συνδέεται με (ακριβώς) ένα μονοπάτι.
6. Το G δεν έχει κύκλους, και η προσθήκη μιας οποιασδήποτε ακμής δημιουργεί κύκλο (δηλ. το G είναι μεγιστοτικά ακυκλικό).

Άσκηση 4

Έστω G απλό μη κατευθυνόμενο επίπεδο γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές. Να δείξετε ότι οι κορυφές του G μπορούν να διαμεριστούν σε τρία σύνολα ώστε το επαγόμενο υπογράφημα που ορίζεται από τις κορυφές κάθε συνόλου να μην έχει κύκλο.

Άσκηση 5

Ολική καταβόθρα σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται μια κορυφή που δεν έχει εξερχόμενες ακμές και υπάρχει εισερχόμενη ακμή από κάθε άλλη κορυφή προς αυτή. Θεωρούμε γράφημα με n κορυφές που αναπαρίσταται με πίνακα γειτνίασης:

1. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $\Theta(n^2)$ που βρίσκει μια ολική καταβόθρα ή αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει.
2. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $\Theta(n)$ που βρίσκει μια ολική καταβόθρα ή να αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει.

Άσκηση 6

Ορίζουμε το εξής παιχνίδι: Έχουμε ένα (αυθαίρετα επιλεγμένο) μη κατευθυνόμενο γράφημα και δύο χρώματα, μπλε και κόκκινο. Αρχικά όλες οι κορυφές είναι βαμμένες με μπλε χρώμα. Σε κάθε βήμα, ο παίκτης μπορεί να "χτυπήσει" οποιαδήποτε κορυφή του γραφήματος, και τότε η κορυφή αυτή και οι γειτονικές της αλλάζουν χρώμα (μπλε $\rightarrow$ κόκκινο, κόκκινο $\rightarrow$ μπλε). Σκοπός του παιχνιδιού είναι να χρωματιστούν όλες οι κορυφές κόκκινες.

1. Να δείξετε ότι δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία ο παίκτης "χτυπάει" τις κορυφές ενός προκαθορισμένου συνόλου.
2. Να δείξετε ότι ο παίκτης δε χρειάζεται να "χτυπήσει" καμία κορυφή πάνω από μία φορά.
   Από τα δύο παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι για να υπάρξει κάποια λύση, αρκεί να βρούμε ένα κατάλληλο υποσύνολο των κορυφών και στη συνέχεια ο παίκτης να "χτυπήσει" μόνο αυτές, από μία φορά, χωρίς να έχει σημασία η σειρά τους.
3. Για μια αλυσίδα, είναι δυνατόν να χρωματιστούν όλες οι κορυφές κόκκινες; Για έναν κύκλο; Για το πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,n}$;

4*. Μπορεί να βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος που υπολογίζει ένα σύνολο κορυφών τις οποίες αν ο παίκτης "χτυπήσει" (από μία φορά, χωρίς να έχει σημασία η σειρά τους), όλες οι κορυφές του γραφήματος χρωματίζονται κόκκινες.