Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 9/11/2009

Άσκηση 1: Ασυμπτωτική Εκτίμηση

Να ταξινομήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις κατά σειρά τάξης μεγέθους από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη. Βρείτε δηλαδή διάταξη $g_1, g_2, g_3, \ldots$ τέτοια ώστε $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, κ.ο.κ.

2^{2^n}	$n!$	$n2^n$	$10n$
$n \log n$	$\log^{x-1} n$	$n^{\log\log n}$	$\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\log n}}$
$\log n^{x+3}$	$\frac{n}{\log n}$	$\frac{n^{x+1}}{\log^{x+1} n}$	$\frac{\log n}{n^x}$
$3n^{x+2}$	e^n	$\sqrt{n!}$	$\binom{n}{x}$

όπου x είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Να επισημάνετε ακόμη τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους.

Άσκηση 2: Επίλυση Αναδρομικών Σχέσεων

(α) Να λύσετε την παρακάτω αναδρομική σχέση χωρίς χρήση του master theorem: $T(n) = 2T(n/3) + 29n$, $T(1) = 7$.

(β) Η πολυπλοκότητα τριών αλγορίθμων για το ίδιο πρόβλημα δίνεται από τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

1. $T_1(n) = 5T_1(n/5) + (x+1)n/\log n$, $T_1(1) = \Theta(1)$
2. $T_2(n) = 2T_2(n/4) + (x+1)n^2\sqrt{n}$, $T_2(1) = \Theta(1)$
3. $T_3(n) = T_3(n-1) + (x+1)/n$, $T_3(1) = \Theta(1)$

όπου x τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Να λύσετε τις αναδρομικές σχέσεις και να ταξινομήσετε τους τρεις αλγορίθμους ως προς την αποδοτικότητά τους. Ποιοι από αυτούς χρησιμοποιούν τη μέθοδο "διαίρει-και-βασίλευε" και γιατί;

Άσκηση 3: Βρείτε το Κάλπικο Νόμισμα

Έχουμε 12 νομίσματα, το ένα από τα οποία είναι κάλπικο. Όλα τα γνήσια νομίσματα έχουν το ίδιο ακριβώς βάρος. Το κάλπικο νόμισμα διαφέρει από τα γνήσια μόνο ως προς το βάρος, αλλά δεν γνωρίζουμε αν είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο. Για τον εντοπισμό του κάλπικου νομίσματος, χρησιμοποιούμε μια ζυγαριά ακριβείας που ελέγχει αν ένα σύνολο νομισμάτων είναι ελαφρύτερο, ίδιου βάρους, ή βαρύτερο από ένα άλλο σύνολο νομισμάτων (φυσικά, τα δύο σύνολα πρέπει να είναι ξένα μεταξύ τους), αλλά δεν δίνει καμία άλλη πληροφορία για το βάρος των νομισμάτων. Οι ζυγίσεις μας πρέπει να αφορούν μόνο υποσύνολα των 12 νομισμάτων που έχουμε στη διάθεσή μας (δηλ. δεν μπορεί να συμμετέχουν στις ζυγίσεις νομίσματα εκτός των 12 αρχικών που γνωρίζουμε ότι είναι γνήσια ή κάλπικα).

1. Να δείξετε ότι με 3 ζυγίσεις μπορούμε να ανακαλύψουμε το κάλπικο νόμισμα και αν αυτό είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο από τα γνήσια. Να δείξετε ακόμη ότι αυτό δεν είναι εφικτό με 2 ζυγίσεις.
2. Αν είχαμε στη διάθεσή μας 2 μόνο ζυγίσεις, ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός νομισμάτων ανάμεσα στα οποία θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε το κάλπικο και αν αυτό είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο από τα γνήσια; Ποιός είναι ο αντίστοιχος αριθμός για 4 ζυγίσεις;

Άσκηση 4: Μέτρηση Αντιστροφών

Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$ μια ακολουθία n διαφορετικών ακεραίων. Ως μέτρο του πόσο απέχει αυτή η ακολουθία από το να είναι ταξινομημένη σε αύξουσα σειρά χρησιμοποιούμε τον *αριθμό των αντιστροφών*. Ο αριθμός των αντιστροφών για την ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι το πλήθος των ζευγαριών στοιχείων a_i, a_j με $i < j$ και $a_i > a_j$, δηλ. το πλήθος των ζευγαριών στοιχείων που βρίσκονται εκτός διάταξης. Για παράδειγμα, ο αριθμός των αντιστροφών για την ακολουθία $6, 5, 4, 3, 2, 1$ είναι 15 (όλα τα ζεύγη είναι εκτός διάταξης), ο αριθμός των αντιστροφών για την ακολουθία $5, 1, 2, 6, 3, 4$ είναι 6 (τα ζεύγη $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(5,4)$, $(6,3)$, και $(6,4)$), και ο αριθμός των αντιστροφών για την ταξινομημένη ακολουθία $1, 2, 3, 4, 5, 6$ είναι 0.

Να διατυπώσετε αλγόριθμο "διαίρει-και-βασίλευε" που υπολογίζει τον αριθμό των αντιστροφών μιας ακολουθίας n διαφορετικών ακεραίων σε χρόνο $\mathrm{O}(n \log n)$. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την χρονική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου.

Άσκηση 5: Separators

Σε ένα δένδρο χωρίς προκαθορισμένη ρίζα ένας κόμβος λέγεται $1/k$-separator αν μετά την αφαίρεσή του, οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν το πολύ n/k κόμβους, όπου n ο αρχικός αριθμός των κόμβων του δένδρου.

1. Να δείξετε ότι σε κάθε δένδρο υπάρχει $1/2$-separator.
2. Να δείξετε ότι αν σε ένα δένδρο υπάρχει $1/k$-separator ($k < n$), τότε υπάρχει κόμβος με βαθμό τουλάχιστον k. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.
3. Βρείτε αλγόριθμο που αποφαίνεται αν ένα δένδρο έχει $1/(x+3)$-separator, όπου x το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Να αποδείξετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και να προσδιορίσετε την πολυπλοκότητά του.

Άσκηση 6: Διάβαση του Ποταμού

(α) Στην όχθη ενός ποταμού βρίσκονται ένας λύκος, ένα πρόβατο κι ένα καφάσι με μαρούλια. Υπάρχει μόνο μια βάρκα, η οποία εκτός από το βαρκάρη μπορεί να μεταφέρει μόνο ένα από τα προηγούμενα κάθε φορά. Όταν ο βαρκάρης είναι παρών τότε επικρατεί ασφάλεια στο σύστημα. Αλλά όταν ο βαρκάρης απουσιάζει, κάποια από τα παραπάνω μπορούν το ένα να φάει το άλλο. Συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

– Αν ο λύκος και το πρόβατο μείνουν αφύλακτα στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το καφάσι με τα μαρούλια, ο λύκος μπορεί να φάει το πρόβατο.
– Αν το πρόβατο μείνει αφύλακτο μαζί με τα μαρούλια στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το λύκο, το πρόβατο θα φάει τα μαρούλια.

Περιγράψτε έναν τρόπο ώστε να καταφέρει ο βαρκάρης να μεταφέρει και τα τρία άθικτα στην απέναντι όχθη.

(β*) Γενικεύοντας, έστω ότι υπάρχουν n αντικείμενα $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ τα οποία ο βαρκάρης επιθυμεί να περάσει στην απέναντι όχθη. Δίνεται γι' αυτά ένα γράφημα ασυμβατοτήτων, του οποίου οι κορυφές είναι τα n αντικείμενα και το x_i συνδέεται με το x_j όταν τα x_i και x_j δεν επιτρέπεται να μείνουν αφύλακτα μαζί στην ίδια όχθη (δηλαδή όταν κάποιο από τα δύο μπορεί να φάει το άλλο).

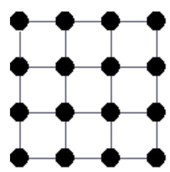
Βρείτε ποιά είναι η ελάχιστη χωρητικότητα της βάρκας ώστε το πρόβλημα να λύνεται όταν το γράφημα ασυμβατοτήτων είναι:

- αλυσίδα (chain) P_n,
- δακτύλιος (ring) C_n,
- αστέρι (star) S_n,
- πλέγμα (grid) διαστάσεων $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$,

Πόσες φορές πρέπει ο βαρκάρης να διασχίσει τον ποταμό σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις; Να εξηγήσετε (με αλγοριθμικούς όρους) τη μέθοδο με την οποία βρήκατε τη λύση.

(γ*) Να δείξετε ότι αν η βάρκα έχει χωρητικότητα μικρότερη από το ελάχιστο κάλυμμα κορυφών (vertex cover) του γραφήματος ασυμβατοτήτων, τότε το πρόβλημα δε λύνεται.

Βοηθητικός Ορισμός. Πλέγμα (grid) διαστάσεων $m \times n$ είναι το γράφημα $G(V, E)$, με $V = \{(i,j) : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ και $E = \{((i,j),(i',j')) : |i - i'| + |j - j'| = 1\}$. Παράδειγμα πλέγματος δίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1. Πλέγμα διαστάσεων 4×4