Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 7/12/2009

Άσκηση 1: Ενημέρωση Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου

Θεωρούμε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη στις ακμές, και ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $T(V, E')$ του G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* που τροποποιεί κατάλληλα το T ώστε να παραμείνει Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο όταν το βάρος μιας ακμής $e \in E$ αλλάζει από $w(e)$ σε $\hat{w}(e)$. Για την διατύπωση και τον προσδιορισμό του χρόνου εκτέλεσης του αλγορίθμου σας, να υποθέσετε ότι τόσο το G όσο και το T αναπαρίστανται με λίστες γειτνίασης.

Σημείωση: Πρόκειται για την Άσκηση **5.23** του DPV.

Άσκηση 2: Bottleneck Spanning Tree

Ένα Bottleneck Spanning Tree ενός απλού μη κατευθυνόμενου γραφήματος με $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές είναι ένα συνδετικό δέντρο του G στο οποίο το μέγιστο βάρος ακμής είναι ελάχιστο μεταξύ όλων των συνδετικών δέντρων του G. Δηλαδή το Bottleneck Spanning Tree T ελαχιστοποιεί το bottleneck κόστος $c(T) = \max_{e \in T}\{w(e)\}$.

(α) Να δείξετε ότι κάθε Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G αποτελεί ένα Bottleneck Spanning Tree.

Με βάση το (α), μπορούμε να υπολογίσουμε ένα Bottleneck Spanning Tree του G σε χρόνο όχι μεγαλύτερο από τον χρόνο που χρειάζεται για τον υπολογισμό ενός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι ένα Bottleneck Spanning Tree μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο.

(β) Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* ο οποίος δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα $G(V, E, w)$ και έναν φυσικό B, και αποφασίζει αν το G έχει συνδετικό δέντρο με bottleneck κόστος μικρότερο ή ίσο του B.

(γ) Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* που δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα $G(V, E, w)$, και υπολογίζει ένα Bottleneck Spanning Tree του G.

Σημείωση: Πρόκειται για την Άσκηση **23-3** του CLRS.

Άσκηση 3: Bottleneck Shortest Path Tree

Θεωρούμε ένα απλό *μη κατευθυνόμενο* γράφημα $G(V, E, c)$ με χωρητικότητες $c(e)$ στις ακμές του $e \in E$, και αξιολογούμε τα μονοπάτια μεταξύ δύο κορυφών u, v με βάση την χωρητικότητά τους. Η χωρητικότητα ενός $u - v$ μονοπατιού p καθορίζεται από την ελάχιστη χωρητικότητα των ακμών του, και είναι $C(p) = \min_{e \in p}\{c(e)\}$. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα (όσο το δυνατόν πιο αραιό) συνδετικό υπογράφημα του G που για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v, περιέχει ένα $u - v$ μονοπάτι μέγιστης χωρητικότητας.

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει συνδετικό *δέντρο* T του G στο οποίο για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v, το μοναδικό $u - v$ μονοπάτι του T αποτελεί ένα $u - v$ μονοπάτι μέγιστης χωρητικότητας.

(β) Με βάση το (α), να διατυπώσετε έναν (όσο το δυνατόν πιο) αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός τέτοιου συνδετικού δέντρου.

Σημείωση: Πρόκειται για την Άσκηση **4.19** του ΚΤ.

Άσκηση 4: Αραιά Γραφήματα με Σύντομα Μονοπάτια

Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά μήκη στις ακμές, και έστω $d_G(u, v)$ η απόσταση των κορυφών u και v στο G με βάση τα μήκη w. Εφαρμόζουμε στο G την παρακάτω παραλλαγή του αλγόριθμου του Kruskal με στόχο να κατασκευάσουμε ένα αραιό συνδετικό υπογράφημα $H(V, E')$, $E' \subseteq E$, όπου η απόσταση $d_H(u, v)$ προσεγγίζει ικανοποιητικά την απόσταση $d_G(u, v)$.

> Εξετάζουμε διαδοχικά τις ακμές του G σε αύξουσα σειρά του μήκους τους (αν σας βοηθάει, μπορείτε να υποθέσετε ότι όλα τα μήκη των ακμών είναι διαφορετικά). Η τρέχουσα ακμή $e = \{u, v\}$ προστίθεται στο H αν είτε το H δεν περιέχει $u - v$ μονοπάτι είτε το συντομότερο $u - v$ μονοπάτι που περιέχει το H έχει μήκος *μεγαλύτερο* από $3w(e)$.

(α) Να δείξετε ότι για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v, ισχύει ότι $d_H(u, v) \leq 3d_G(u, v)$, όπου $d_H(u, v)$ η απόσταση των u και v στο γράφημα H που υπολογίζεται από τον παραπάνω αλγόριθμο.

(β*) Να δείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και $\omega(n^{3/2})$ ακμές περιέχει κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο του 4. *Σημείωση:* Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και $\omega(n^{1+1/k})$ ακμές περιέχει κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο του $2k$.

(γ) Να δείξετε ότι το πλήθος ακμών του H είναι $O(n^{3/2})$, όπου n το πλήθος κορυφών του G.

Σημείωση: Πρόκειται για την Άσκηση **4.31** του ΚΤ.