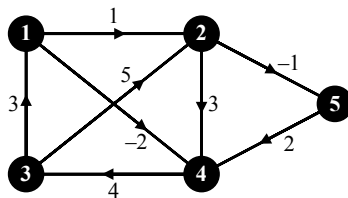




## Άσκηση 1: Αλγόριθμος Floyd-Warshall

Να υλοποιήσετε τον αλγόριθμο των Floyd-Warshall για τον υπολογισμό των Συντομότερων Μονοπατιών ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη κορυφών. Η υλοποίησή σας πρέπει να εξασφαλίζει ότι ο χρόνος εκτέλεσης στη χειρότερη περίπτωση θα είναι  $O(n^3)$ , όπου  $n$  το πλήθος των κορυφών του γραφήματος εισόδου.



**Σχήμα 1.** Παράδειγμα κατευθυνόμενου γραφήματος με (θετικά και αρνητικά) μήκη στις ακμές.

Για την είσοδο του προγράμματος και την αρίθμηση των κορυφών ισχύει ότι και στην εκφώνηση της Άσκησης 3, στην 4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων. Αν το γράφημα εισόδου δεν έχει κύκλο αρνητικού μήκους, το πρόγραμμα σας θα τυπώνει στην πρώτη γραμμή τη συμβολοσειρά *No negative cycles.* και τα αποτελέσματά του στις επόμενες  $2n$  γραμμές. Συγκεκριμένα, για  $i = 1, 2, \dots, n$ , το πρόγραμμα θα τυπώνει στην  $(2i - 1)$ -οστή γραμμή τις αποστάσεις των κορυφών από την κορυφή  $i$ , και στην  $2i$ -οστή γραμμή τα στοιχεία του πίνακα προγόνων που αντιστοιχεί στο Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών με ρίζα την κορυφή  $i$ . Οι αποστάσεις και τα

στοιχεία του πίνακα προγόνων θα τυπώνονται με τη σειρά που προκύπτει από την αρίθμηση των κορυφών και θα χωρίζονται με κενό. Αν μια κορυφή δεν είναι προσπελάσιμη από την  $i$ , θα τυπώνεται *INF* στη θέση της απόστασής της, και για την ρίζα  $i$  ή μια κορυφή που δεν συμμετέχει στον Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών, θα τυπώνεται *NILL* στην αντίστοιχη θέση του πίνακα προγόνων. Έτσι για το γράφημα του Σχήματος 1, το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει:

```
No negative cycles.  
0 1 2 -2 0  
NILL 1 4 1 2  
8 0 5 1 -1  
3 NILL 4 5 2  
3 4 0 1 3  
3 1 NILL 1 2  
7 8 4 0 7  
3 1 4 NILL 2  
9 10 6 2 0  
3 1 4 5 NILL
```

Αν το γράφημα εισόδου έχει κύκλο αρνητικού μήκους, το πρόγραμμα σας θα τυπώνει στην πρώτη γραμμή τη συμβολοσειρά *Negative cycle.*, και στην δεύτερη γραμμή τον αριθμό των ακμών του κύκλου αρνητικού μήκους, άνω-κάτω τελεία, και τις κορυφές του κύκλου αρνητικού μήκους χωρισμένες με κενό. Η πρώτη και η τελευταία κορυφή του κύκλου πρέπει να ταυτίζονται.

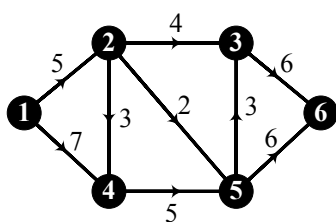
Η σειρά των κορυφών πρέπει να αντιστοιχεί στη φορά των ακμών που περιλαμβάνονται στον κύκλο αρνητικού μήκους (π.χ. αν το πρόγραμμα τυπώνει 3: 6 1 5 6, πρέπει οι ακμές (6, 1), (1, 5), και (5, 6) να υπάρχουν στο γράφημα και να έχουν αρνητικό συνολικό βάρος). Έτσι για το γράφημα του Σχήματος 3, στην 4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων, το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει:

```
Negative cycle.
3: 6 1 5 6
```

Για πειραματισμό, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γραφήματα fw5.txt, fw6.txt, fw10.txt, fw20a.txt, fw20b.txt, fw20c.txt, fw100.txt, fw200.txt, και τα γραφήματα των ασκήσεων 2 και 3, στην 4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων.

## Άσκηση 2: Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

Να υλοποιήσετε τον αλγόριθμο των Ford-Fulkerson για τον υπολογισμό μιας μέγιστης  $s - t$  ροής και μιας ελάχιστης  $s - t$  τομής σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα με χωρητικότητες στις ακμές. Η υλοποίησή σας να χρησιμοποιεί το επαυξητικό μονοπάτι με τον ελάχιστο αριθμό ακμών και να εξασφαλίζει ότι ο χρόνος εκτέλεσης στη χειρότερη περίπτωση θα είναι  $O(nm^2)$ , όπου  $n$  το πλήθος των κορυφών και  $m$  το πλήθος των ακμών του γραφήματος εισόδου.



**Σχήμα 2.** Παράδειγμα κατευθυνόμενου γραφήματος με χωρητικότητες.

Για την είσοδο του προγράμματος και την αρίθμηση των κορυφών ισχύει ότι και στην εκφώνηση της Άσκησης 1, με μοναδική διαφορά ότι οι χωρητικότητες των ακμών θα είναι πάντα θετικές. Το πρόγραμμά σας θα θεωρεί την κορυφή 1 ως αρχική, την κορυφή  $n$  ως τελική, και θα υπολογίζει μια μέγιστη ροή μεταξύ των κορυφών 1 και  $n$  και την αντίστοιχη ελάχιστη τομή.

Στην έξοδο, το πρόγραμμά σας θα τυπώνει στην πρώτη γραμμή τον όγκο της μέγιστης ροής που δρομολογείται από την κορυφή 1 στην κορυφή  $n$ , στην δεύτερη γραμμή την ροή που δρομολογείται σε κάθε ακμή, στην τρίτη γραμμή τις κορυφές που βρίσκονται στο ίδιο τμήμα με την κορυφή 1 στην ελάχιστη τομή, και στην τέταρτη γραμμή τις κορυφές που βρίσκονται στο ίδιο τμήμα με την κορυφή  $n$  στην ελάχιστη τομή. Πιο συγκεκριμένα, στη δεύτερη γραμμή θα τυπώνεται μια τριάδα  $(v_1 v_2 f_{(v_1, v_2)})$  για κάθε ακμή  $(v_1, v_2)$  με θετική ροή  $f_{(v_1, v_2)}$ . Τα στοιχεία κάθε τριάδας και οι διαδοχικές τριάδες θα χωρίζονται με κενό. Οι ακμές με μηδενική ροή θα παραλείπονται. Στην τρίτη γραμμή θα τυπώνεται πρώτα ο αριθμός των κορυφών που βρίσκονται στο ίδιο τμήμα με την κορυφή 1 στην ελάχιστη τομή, μετά άνω-και-κάτω τελεία, και μετά οι αριθμοί αυτών των κορυφών σε αύξουσα σειρά (χωρισμένες με κενό). Με τον ίδιο τρόπο θα τυπώνονται στην τέταρτη γραμμή οι κορυφές που βρίσκονται στο ίδιο τμήμα με την κορυφή  $n$  στην ελάχιστη τομή. Έτσι για το γράφημα του Σχήματος 2, το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει:

```
10
(1 2 5) (1 4 5) (2 3 4) (2 5 1) (3 6 4) (4 5 5) (5 6 6)
2: 1 4
4: 2 3 5 6
```

Για πειραματισμό, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα γραφήματα ff6.txt, ff10.txt, ff26.txt, ff63.txt, ff99.txt, ff499.txt.