

# Εισαγωγικές Έννοιες

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Υπολογιστικό Πρόβλημα

- Μετασχηματισμός δεδομένων εισόδου σε δεδομένα εξόδου.
  - Δομή δεδομένων εισόδου (έγκυρο στιγμιότυπο).
  - Δομή και ιδιότητες δεδομένων εξόδου (απάντηση ή λύση).
  - Τυπικά: διμελής σχέση στις συμβ/ρές εισόδου, εξόδου.
  - Διαισθητικά: ερώτηση που αφορά στιγμιότυπα.
- Στιγμιότυπο: μαθηματικό αντικείμενο που ορίζεται από δεδομένα εισόδου.
  - Διατυπώνουμε ερώτηση και περιμένουμε απάντηση.
  - Άπειρο σύνολο στιγμιότυπων.
- Κατηγορίες Προβλημάτων:
  - Βελτιστοποίησης: λύση με βέλτιστη αντικειμενική τιμή.
  - Απόφασης: απάντηση **ΝΑΙ** ή **ΌΧΙ**.

# Προβλήματα Βελτιστοποίησης

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:  $\Pi$ 
  - Σύνολο στιγμιότυπων  $\Sigma_{\Pi}$
  - Σύνολο αποδεκτών λύσεων:  $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma)$
  - Αντικειμενική συνάρτηση:  $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, f_{\sigma} : \Lambda_{\Pi}(\sigma) \mapsto \mathbb{R}$
- Δεδομένου στιγμιότυπου  $\sigma$ , ζητείται  $\lambda_{\sigma}^* \in \Lambda_{\Pi}(\sigma)$ :
  - $\forall \lambda \in \Lambda_{\Pi}(\sigma), f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*) \geq f_{\sigma}(\lambda)$  πρόβλημα **μεγιστοποίησης**
  - $\forall \lambda \in \Lambda_{\Pi}(\sigma), f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*) \leq f_{\sigma}(\lambda)$  πρόβλημα **ελαχιστοποίησης**
  - $\lambda_{\sigma}^*$  **βέλτιστη λύση** και  $f_{\sigma}(\lambda_{\sigma}^*)$  **βέλτιστη αντικειμενική τιμή**
- Συνδυαστικής βελτιστοποίησης: πεπερασμένο σύνολο αποδεκτών λύσεων που περιλαμβάνει βέλτιστη.

# Προβλήματα Απόφασης

- Πρόβλημα απόφασης:  $\Pi$ 
  - Σύνολο στιγμιότυπων  $\Sigma_{\Pi}$
  - Σύνολο (αποδεκτών) λύσεων:  $\forall \sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma)$
  - Δεδομένου  $\sigma \in \Sigma_{\Pi}, \Lambda_{\Pi}(\sigma) \neq \emptyset$ ;
- Επιδέχεται μόνο δύο απαντήσεις: **ΝΑΙ** ή **ΌΧΙ**.

## Παραδείγματα Προβλημάτων

- **Πρόβλημα Προσπελασιμότητας:**
  - **Στιγμιότυπο:** Κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$ , κορυφές  $s, t \in V$ .
  - **Ερώτηση:** Υπάρχει  $s - t$  μονοπάτι;
- **Πρόβλημα Συντομότερου Μονοπατιού:**
  - **Στιγμιότυπο:** Κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$ , μήκη στις ακμές  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ , κορυφές  $s, t \in V$ .
  - **Ερώτηση:** Ποιο είναι το συντομότερο  $s - t$  μονοπάτι;

## Παραδείγματα Προβλημάτων

- **Πρόβλημα κύκλου Hamilton:**
  - **Στιγμιότυπο:** Γράφημα  $G(V, E)$ .
  - **Ερώτηση:** Υπάρχει κύκλος Hamilton στο  $G$ ;
- **Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή:**
  - **Στιγμιότυπο:** Σύνολο  $N = \{1, \dots, n\}$  σημείων, αποστάσεις  $d: N \times N \rightarrow \mathbb{R}_+$ .
  - **Ερώτηση:** Ποια περιοδεία ελαχιστοποιεί συνολικό μήκος ή ισοδύναμα, **ποια μετάθεση  $\pi$**  του  $N$  ελαχιστοποιεί το:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(\pi(i), \pi(i+1)) + d(\pi(n), \pi(1))$$

## Αλγόριθμος

- **Σαφώς** ορισμένη διαδικασία για την **επίλυση** προβλήματος σε **πεπερασμένο** χρόνο από υπολογιστική **μηχανή**.
  - «Συνταγή» για την επίλυση υπολογιστικού προβλήματος.
  - **Σαφήνεια:** κάθε ενέργεια ορίζεται επακριβώς.
  - Είναι **μηχανιστικά αποτελεσματικός**.
  - Δέχεται ως **είσοδο στιγμιότυπο** προβλήματος και παράγει ως **έξοδο πάντα** την σωστή λύση.
  - Η λύση υπολογίζεται έπειτα από **πεπερασμένο #ενεργειών**.
- **Ορθότητα** αλγόριθμου: απαντάει πάντα σωστά.
  - **Λάθος:** αντιπαράδειγμα. **Ορθότητα:** μαθηματική απόδειξη.
- Προβλήματα λύνονται από **πολλούς σωστούς** αλγόριθμους:
  - Ποιος είναι ο **καλύτερος** (για συγκεκριμένη εφαρμογή);

## Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

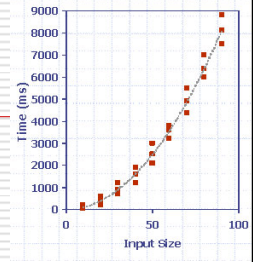
- Υπολογιστική πολυπλοκότητα **αλγόριθμου A:**
  - Ποσότητα υπολογιστικών πόρων που απαιτεί **A** ως **αύξουσα συνάρτηση μεγέθους** στιγμιότυπου εισόδου.
  - Χρόνος, μνήμη, επεξεργαστές, επικοινωνία, τυχαιότητα.
  - **Χειρότερης, μέσης, καλύτερης** περίπτωσης.
- **Μέγεθος** στιγμιότυπου εισόδου **n:**
  - **#bits** για αναπαράσταση **δεδομένων εισόδου** στη μνήμη.
  - Πλήθος **βασικών συνιστωσών** που αποτελούν μέτρο μεγέθους και δυσκολίας στιγμιότυπου (π.χ. κορυφές & ακμές γράφου).
- Υπολογιστική πολυπλοκότητα **προβλήματος Π:**
  - Πολυπλοκότητα (χειρότερης περίπτωσης) καλύτερου αλγόριθμου που λύνει πρόβλημα  $\Pi$ .

## Ανάλυση Αλγορίθμου

- Απόδειξη ορθότητας
  - Μερικές φορές για ένα καλώς ορισμένο υποσύνολο των στιγμιότυπων εισόδου.
- Εκτίμηση υπολογιστικής πολυπλοκότητας.
  - **Χειρότερης, μέσης, και καλύτερης** περίπτωσης.
- Καταλληλότερη λύση ανάλογα με **απαιτήσεις εφαρμογής**.

## Πειραματική Μελέτη

- Υλοποίηση αλγορίθμου σε **πρόγραμμα**.
  - Δημιουργία **στιγμιότυπων** διαφορετικού μεγέθους και **σύνθεσης**.
  - Επιβεβαίωση ορθότητας και **καταγραφή πόρων** για κάθε εκτέλεση.
  - Απεικόνιση **αποτελεσμάτων** σε γραφική παράσταση και **εξαγωγή συμπερασμάτων**.
- Περιορισμοί – Δυσκολίες:
  - Υλοποίηση χρονοβόρα και ενδεχομένως δύσκολη.
  - Αποτελέσματα όχι κατ' ανάγκη αντιπροσωπευτικά.
  - Συμπεράσματα δεν γενικεύονται κατ' ανάγκη.



## Θεωρητική Ανάλυση

- Δεν απαιτεί υλοποίηση αλλά σαφή **περιγραφή** αλγορίθμου.
- Καταλήγει σε **γενικά συμπεράσματα**:
  - Λαμβάνει υπόψη **όλα** τα στιγμιότυπα.
  - Προσδιορίζει υπολογιστική πολυπλοκότητα ως συνάρτηση μεγέθους εισόδου, ...
  - ... αλλά **ανεξάρτητα** από υπολογιστικό **περιβάλλον**.
  - Εστιάζει στις **εγγενείς ιδιότητες** του αλγορίθμου.
- Συμπεράσματα **επιβεβαιώνονται** εύκολα.
- Μαθηματικό υπόβαθρο: Διακριτά Μαθηματικά.
  - Γραφήματα, μαθηματική λογική, επαγωγή, αναδρομικές σχέσεις, συνδυαστική, πιθανότητες, ...

## Υπολογιστικό Μοντέλο

- Μηχανή Άμεσης Προσπέλασης Μνήμης (Random Access Machine, RAM).
  - **Ιδεατό μονο-επεξεργαστικό** σύστημα που ακολουθεί **αρχιτεκτονική von Neumann**.
  - Ένας επεξεργαστής, ακολουθιακή εκτέλεση εντολών
  - Απεριόριστες θέσεις μνήμης προσπελάσιμες με **διεύθυνση**.
  - Στοιχειώδη υπολογιστικά **βήματα** εκτελούνται σε **μοναδιαίο χρόνο**:
    - Ανάγνωση από / εγγραφή σε θέση μνήμης, αριθμητικές και λογικές πράξεις, συγκρίσεις, εντολές ελέγχου ροής, ...

# Ασυμπτωτική Εκτίμηση

---

- Χρόνος εκτέλεσης αλγόριθμου A:
  - Αύξουσα συνάρτηση του  $T(n)$  που εκφράζει σε πόσο χρόνο ολοκληρώνεται ο A όταν εφαρμόζεται σε στιγμ. μεγέθους  $n$ .
- Ενδιαφέρει η τάξη μεγέθους  $T(n)$  και όχι ακριβής εκτίμηση  $T(n)$ .
  - Ακριβής εκτίμηση είναι συχνά δύσκολη και εξαρτάται από υπολογιστικό περιβάλλον, υλοποίηση, ...
  - Τάξη μεγέθους είναι εγγενής ιδιότητα του αλγόριθμου.
    - Δυαδική αναζήτηση έχει λογαριθμικό χρόνο.
    - Γραμμική αναζήτηση έχει γραμμικό χρόνο.
- **Ασυμπτωτική εκτίμηση αγνοεί σταθερές** και εστιάζει σε **τάξη μεγέθους** χρόνου εκτέλεσης.