Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

- Υπολογιστική πολυπλοκότητα αλγόριθμου Α:
  - Ποσότητα υπολογιστικών πόρων που απαιτεί Α ως αύξουσα συνάρτηση μεγέθους στιγμιότυπου εισόδου.
  - Χρόνος, μνήμη, επεξεργαστές, επικοινωνία, τυχαιότητα.
  - **Χειρότερης**, **μέσης**, **καλύτερης** περίπτωσης.
- Μέγεθος στιγμιότυπου εισόδου ***n*** :
  - #bits για αναπαράσταση δεδομένων εισόδου στη μνήμη.
  - Πλήθος βασικών συνιστωσών που αποτελούν μέτρο μεγέθους και δυσκολίας στιγμιότυπου (π.χ. κορυφές & ακμές γράφου).
- Υπολογιστική πολυπλοκότητα προβλήματος Π:
  - Πολυπλοκότητα (χειρότερης περίπτωσης) καλύτερου αλγόριθμου που λύνει πρόβλημα Π.

Ανάλυση Αλγορίθμου

- Απόδειξη ορθότητας
  - Μερικές φορές για ένα καλώς ορισμένο υποσύνολο των στιγμιοτύπων εισόδου.
- Εκτίμηση υπολογιστικής πολυπλοκότητας.
  - **Χειρότερης**, **μέσης**, και **καλύτερης** περίπτωσης.
- Καταλληλότερη λύση ανάλογα με απαιτήσεις εφαρμογής.

Ασυμπτωτική Εκτίμηση

- Χρόνος εκτέλεσης αλγόριθμου Α:
  - Αύξουσα συνάρτηση του $T(n)$ που εκφράζει σε πόσο χρόνο ολοκληρώνεται ο Α όταν εφαρμόζεται σε στιγμ. μεγέθους n.
- Ενδιαφέρει η τάξη μεγέθους $T(n)$ και όχι ακριβής εκτίμηση $T(n)$.
  - Ακριβής εκτίμηση είναι συχνά δύσκολη και εξαρτάται από υπολογιστικό περιβάλλον, υλοποίηση, ...
  - Τάξη μεγέθους είναι εγγενής ιδιότητα του αλγόριθμου.
    - Δυαδική αναζήτηση έχει λογαριθμικό χρόνο.
    - Γραμμική αναζήτηση έχει γραμμικό χρόνο.
- **Ασυμπτωτική εκτίμηση** αγνοεί σταθερές και εστιάζει σε τάξη μεγέθους χρόνου εκτέλεσης.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

- … εκφράζει τα αποτελέσματα ασυμπτωτικής εκτίμησης.
- Θ( ) δηλώνει την **ακριβή εκτίμηση** τάξης μεγέθους.

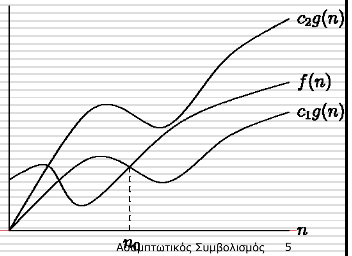
  $f(n) \in \Theta(g(n))$ ή $f(n) = \Theta(g(n))$ ανν $\exists$σταθερές $c_1, c_2, n_0 > 0$:

  $$\forall n \geq n_0\,, \quad c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$$

  - $\Theta(g(n))$ σύνολο συναρτήσεων ίδιας τάξης μεγέθους με $g(n)$.

$an^2 + bn + c = \Theta(n^2)$

$500n^2 + 100n^3 + 10^{-5}n^3 \log n = \Theta(n^3 \log n)$



Ασυμπτωτικός Συμβολισμός Ο

- Ο( ) δηλώνει **άνω φράγμα** στην τάξη μεγέθους.

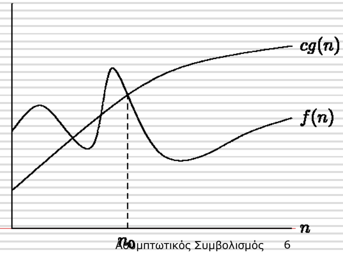
  $f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$ ή $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ ανν $\exists$σταθερές $c, n_0 > 0$:

  $$\forall n \geq n_0\,, \quad f(n) \leq c\, g(n)$$

  - $\mathrm{O}(g(n))$ σύνολο συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που δεν υπερβαίνει τάξη μεγέθους $g(n)$.

$100n^3 + 10^{-5}n^3 \log n = \mathrm{O}(n^3 \log n) = \mathrm{O}(n^4)$

$10^{-10}n^2 \notin \mathrm{O}(n)$



Ασυμπτωτικός Συμβολισμός ο

- ο( ) δηλώνει **άνω φράγμα** στην τάξη μεγέθους που δεν είναι ακριβές.

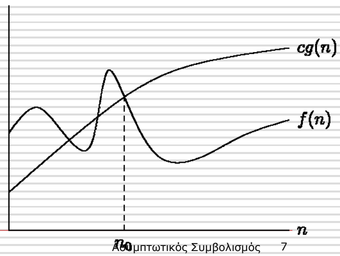
  $f(n) \in \mathrm{o}(g(n))$ ή $f(n) = \mathrm{o}(g(n))$ ανν $\forall c > 0, \exists n_0 > 0$:

  $$\forall n \geq n_0\,, \quad f(n) < c\, g(n) \quad ή \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

  - $\mathrm{o}(g(n))$ σύνολο συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που υπολείπεται τάξης μεγέθους $g(n)$.

    $5n^3 \log n = \mathrm{o}(n^4)$

    $10n^2 \notin \mathrm{o}(n^2)$.



Ασυμπτωτικός Συμβολισμός Ω

- Ω( ) δηλώνει **κάτω φράγμα** στην τάξη μεγέθους.

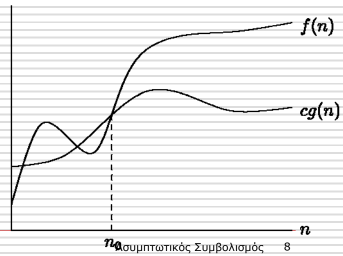
  $f(n) \in \Omega(g(n))$ ή $f(n) = \Omega(g(n))$ ανν $\exists$σταθερές $c, n_0 > 0$:

  $$\forall n \geq n_0\,, \quad f(n) \geq c\, g(n)$$

  - $\mathrm{O}(g(n))$ σύνολο συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που δεν υπολείπεται τάξης μεγέθους $g(n)$.

$10^{-5}n^3 \log n = \Omega(n^3 \log n) = \Omega(n^3)$

$10^{10}n \notin \Omega(n^2)$.



Ασυμπτωτικός Συμβολισμός ω

- ω( ) δηλώνει **κάτω φράγμα** στην τάξη μεγέθους που δεν είναι ακριβές.

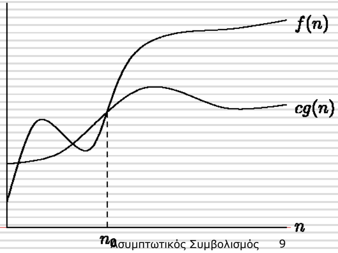
  $f(n) \in \omega(g(n))$ ή $f(n) = \omega(g(n))$ ανν $\forall c > 0, \exists n_0 > 0:$

  $\forall n \geq n_0\,,\quad f(n) > c\,g(n)$ ή $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

  - ω(*g*(*n*)) σύνολο συναρτήσεων με τάξη μεγέθους που υπερβαίνει τάξης μεγέθους *g*(*n*).

    $5n^3 \log n = \omega(n^3)$

    $10n^2 \neq \omega(n^2).$



Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

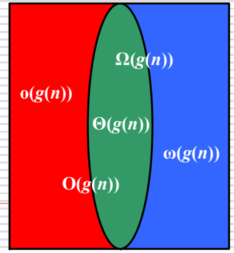
- *f*(*n*) = Θ(*g*(*n*)) ~ ασυμπτωτικά *f*(*n*) = *g*(*n*)

  f(*n*) = O(*g*(*n*)) ~ ασυμπτωτικά *f*(*n*) ≤ *g*(*n*)

  f(*n*) = o(*g*(*n*)) ~ ασυμπτωτικά *f*(*n*) < *g*(*n*)

  f(*n*) = Ω(*g*(*n*)) ~ ασυμπτωτικά *f*(*n*) ≥ *g*(*n*)

  f(*n*) = ω(*g*(*n*)) ~ ασυμπτωτικά *f*(*n*) > *g*(*n*)
- Κάποιες απλές σχέσεις:
  - O(*g*(*n*)) = o(*g*(*n*)) ∪ Θ(*g*(*n*))
  - Ω(*g*(*n*)) = ω(*g*(*n*)) ∪ Θ(*g*(*n*))
  - Θ(*g*(*n*)) = O(*g*(*n*)) ∩ Ω(*g*(*n*))
  - o(*g*(*n*)) ∩ ω(*g*(*n*)) = ∅



Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

- Πολυώνυμο βαθμού d: $a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + a_1 n + a_0 = \Theta(n^d)$
- Κάποια αθροίσματα:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2),\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \Theta(n^3), \ldots, \sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1/i = \Theta(\log n),\ \sum_{i=1}^{n} 2^i = \Theta(2^n)$$

- Επίσης: $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
- Ιεράρχηση: $O(1) \subset O(\log^* n) \subset O(\log n) \subset O(\mathrm{poly}(\log n)) \subset$

  $\subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(\mathrm{poly}(n)) \subset$

  $\subset O(n^{\log n}) \subset O(2^n) \subset O(3^n) \subset O(n!) \subset O(n^n) \subset O(A(n))$

Κάποιες Ασκήσεις

- Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;
  - 10 *f*(*n*) + 10^{100} = O(*f*(*n*)) **Αληθής**
  - *f*(*n*) + *g*(*n*) = Θ(min{*f*(*n*), *g*(*n*)}) **Ψευδής**
  - *f*(*n*) + *g*(*n*) = Ω(min{*f*(*n*), *g*(*n*)}) **Αληθής**
  - *f*(*n*) + *g*(*n*) = O(max{*f*(*n*), *g*(*n*)}) **Αληθής**

Κάποιες Ασκήσεις

- Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

$f(n)$	$g(n)$	$\Theta(g(n))$	$O(g(n))$	$o(g(n))$	$\Omega(g(n))$	$\omega(g(n))$
2^{n+5}	$2^n + 2^5 + n^{100}$	■	■		■	
$n^4 - n^3$	$16^{\log n}$	■	■		■	
5^{4n}	10^{2n}				■	■
$n^{1/\log\log n}$	$n^{0.001}$		■	■		
$n!$	n^n		■	■		
$n^{\log^{20} n}$	2^n		■	■		

Κάποιες Ασκήσεις

- Να βάλετε συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά τάξης μεγέθους:

$$2^{5n} \quad \log^4 n \quad (\log n)^{100} \log\log n \quad n\log\log n \quad n^{0.1}\log\log n$$
$$2^n \quad n^{0.6} \quad 2^n + n^{2^{100}} \quad n^{1/\log n} \quad \log(n!)$$
$$n^{\log n} \quad \log\log n \quad 2^{\log^3 n} \quad \frac{n}{\log_n 2} + n \quad (\log n)^{\log n}$$

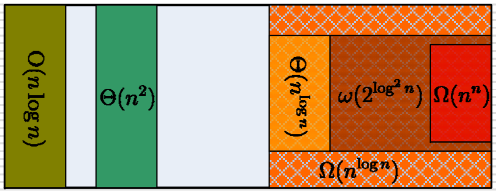
- Απάντηση:

$$n^{1/\log n} = \Theta(1),\ \log\log n,\ \log^4 n,\ (\log n)^{100}\log\log n,$$
$$n^{0.1}\log\log n,\ n^{0.6},$$
$$n\log\log n,\ \log(n!) = \Theta(n\log n),\ \frac{n}{\log_n 2} + n = \Theta(n\log n),$$
$$(\log n)^{\log n} = \Theta(n^{\log\log n}),\ n^{\log n},\ 2^{\log^3 n} = \Theta(n^{\log^2 n}),$$
$$2^n,\ 2^n + n^{2^{100}} = \Theta(2^n),\ 2^{5n}$$

Κάποιες Ασκήσεις

- Σχεδιάσετε διάγραμμα Venn για τις κλάσεις συναρτήσεων:

$$\Omega(n^n),\ \Theta(n^{\log n}),\ \omega(2^{\log^2 n}),\ \Omega(n^{\log n}),\ \Theta(n^2),\ O(n\log n)$$



Πρακτικά Αποδοτικοί Αλγόριθμοι

- … έχουν πολυωνυμική (χρονική) πολυπλοκότητα.
  - Π.χ. $\log n$, n, $n\log n$, n^2, n^3, …
  - Χρόνοι n^d, όπου d μεγάλο, σπάνιοι και βελτιώνονται.
- Εκθετική πολυπλοκότητα **απαγορευτική** για μεγάλα στιγμιότυπα! Π.χ. $100n^2 < 2^{n/5}$ για κάθε $n \geq 100$

Αύξηση μεγεθών που λύνουμε σε συγκεκριμένο χρόνο όταν 10πλασιάζεται η ταχύτητα υπολογιστή:

Πολυπλ.	n πριν	n' μετά	Λόγος
$100\log n$	2^{100}	2^{1000}	2^{900}
$10n$	1000	10000	10
$1000n$	10	100	10
$10n\log n$	140	1003	7.16
$5n^2$	44	141	$\sqrt{10} = 3.16$
2^n	13	16	$1.25\ (n' = n + \log 10)$

Αποδοτική Επίλυση: Κλάση P

- Αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου λύνει κάθε στιγμιότυπο σε χρόνο O(n^d), *d* σταθερά.
- **Κλάση P** : προβλήματα απόφασης που επιλύονται από αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου.
  - Shortest paths, MST, max flow, min cut, min-cost flow, maximum matching, linear programming, …
- **Αξίωμα Cook-Karp** : κλάση ευεπίλυτων προβλημάτων ταυτίζεται με κλάση P.

Αποδοτική Επίλυση: Κλάση P

- **Κλάση P** : προβλήματα που λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο.
  - Shortest paths, MST, max flow, min cut, min-cost flow, maximum matching, linear programming, …
- **Θέση Cook-Karp** : **P** ταυτίζεται με ευεπίλυτα προβλήματα.
- Υπέρ θέσης Cook-Karp:
  - Συνήθως πολυώνυμα μικρού βαθμού (π.χ. n, n^2, n^3).
  - Διπλασιασμός υπολογιστικής ισχύος: σημαντική αύξηση στο μέγεθος στιγμιότυπων που επιλύουμε.
- Κριτική στη θέση Cook-Karp:
  - Ακραίες περιπτώσεις: πρακτικό το n^{100} αλλά όχι το $2^{n/100}$!
  - Γραμμικός Προγραμματισμός: Simplex vs. Ellipsoid.