Quicksort

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πρόβλημα Ταξινόμησης

- **Είσοδος** : ακολουθία n αριθμών $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.
- **Έξοδος** : μετάθεση $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$ με στοιχεία σε **αύξουσα** σειρά ($\forall i \;\; \alpha'_i \leq \alpha'_{i+1}$).
- Στατική συλλογή δεδομένων (όχι εισαγωγή και διαγραφή).
- **Θεμελιώδες** αλγοριθμικό πρόβλημα.
  - Πολλές εφαρμογές (περ. 25% υπολογιστικού χρόνου).
  - Ταχύτατη αναζήτηση σε ταξινομημένα δεδομένα.
  - Σημαντικές αλγοριθμικές ιδέες και τεχνικές.

Συγκριτικοί Αλγόριθμοι

- Ταξινόμηση αποκλειστικά με συγκρίσεις και αντιμεταθέσεις στοιχείων.
  - Δεν εκμεταλλεύονται τύπο δεδομένων (π.χ. αριθμούς, συμβολοσειρές) : γενική εφαρμογή.
  - **Ανάλυση** : πλήθος συγκρίσεων.
πλήθος αντιμεταθέσεων.
  - Κάτω φράγμα #συγκρίσεων : $\Omega(n \log n)$.
  - Ταξινόμηση σε χρόνο $\Theta(n+k)$ για φυσικούς αριθμούς στο $\{1, \ldots, k\}$ (π.χ. bin sort, radix sort).

Μέθοδοι Ταξινόμησης

- **Αντιμετάθεση** κάθε ζεύγους στοιχείων εκτός διάταξης (bubble sort).
- **Εισαγωγή** στοιχείου σε κατάλληλη θέση ταξινομημένου πίνακα (insertion sort).
- **Επιλογή** μεγαλύτερου στοιχείου και τοποθέτηση στο τέλος (selection sort, heapsort).
- **Συγχώνευση** ταξινομημένων πινάκων : Διαίρεση στη μέση, ταξινόμηση, συγχώνευση (mergesort).
- **Διαίρεση** σε μικρότερα και μεγαλύτερα από στοιχείο-διαχωρισμού και ταξινόμηση (quicksort).

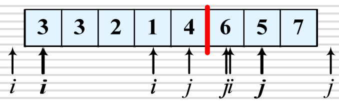
Quicksort [Hoare, 62]

- Στοιχείο διαχωρισμού (pivot), π.χ. πρώτο, τυχαίο, …
- Αναδιάταξη και διαίρεση εισόδου σε δύο υπο-ακολουθίες:
  - Στοιχεία αριστερής υπο-ακολ. ≤ στοιχείο διαχωρισμού.
  - Στοιχεία δεξιάς υπο-ακολ. ≥ στοιχείο διαχωρισμού.
- Ταξινόμηση υπο-ακολουθιών αναδρομικά.
- Ακολουθία ταξινομημένη – όχι σύνθεση!

```
quickSort(int A[], int left, int right) {
   if (left >= right) return; // At most 1 element
   q = partition(A, left, right);
   quickSort(A, left, q);
   quickSort(A, q+1, right);   }
```


Διαίρεση

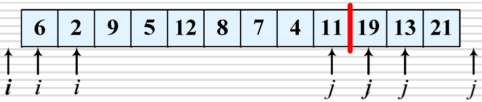
- Στοιχείο διαχωρισμού (pivot), π.χ. **πρώτο**, τυχαίο, …
- Διαίρεση σε ένα πέρασμα :
  - Σάρωση από αριστερά (με δείκτη *i*) μέχρι A[*i*] ≥ pivot.
  - Σάρωση από δεξιά (με δείκτη *j*) μέχρι A[*j*] ≤ pivot.
  - Αν δεν έχουν εξεταστεί όλα τα στοιχεία (*i* < *j*): αντιμετάθεση(A[*i*] , A[*j*]) και συνέχεια.
  - Αν έχουν εξεταστεί όλα: επιστροφή ορίου διαχωρισμού (δείκτη *j*).



Στοιχείο διαχωρισμού : 5

Διαίρεση

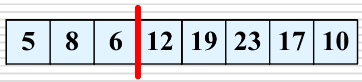
```
partition(int A[], int left, int right) {
   int pivot = A[left]; i = left – 1; j = right + 1;
   while (1) {
      while (A[++i] < pivot) ;
      while (A[--j] > pivot) ;
      if (i < j) swap(A[i], A[j]);
      else return(j); }   }
```



Στοιχείο διαχωρισμού : 13

Διαίρεση

```
partition(int A[], int left, int right) {
   int pivot = A[left]; i = left – 1; j = right + 1;
   while (1) {
      while (A[++i] < pivot) ;
      while (A[--j] > pivot) ;
      if (i < j) swap(A[i], A[j]);
      else return(j); }   }
```



Στοιχείο διαχωρισμού : 10

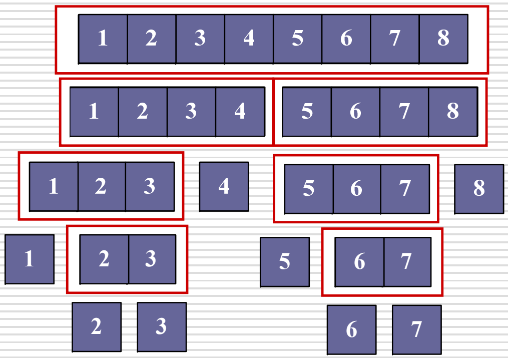
Ανάλυση Διαχωρισμού

- Ορθότητα **partition** :
  - Διατηρεί και επεκτείνει αριστερή περιοχή με στοιχεία ≤ pivot και δεξιά περιοχή με στοιχεία ≥ pivot.
  - A[*i*] ≥ pivot : επέκταση αριστερής περιοχής σταματά.
  - A[*j*] ≤ pivot : επέκταση δεξιάς περιοχής σταματά.
  - Ξένες περιοχές : αντιμετάθεση στοιχείων και συνέχεια.
  - Επικάλυψη : ολοκλήρωση διαίρεσης.
  - Τελικά τα στοιχεία αριστερά ≤ pivot και τα στοιχεία δεξιά ≥ pivot, **όπως απαιτείται.**
- Κάθε περιοχή ≥ 1 στοιχείο. **Quicksort τερματίζει.** (1 ≤ σημείο διαχωρισμού ≤ *n* − 1)
  - Απαραίτητα: *i* και *j* σταματούν στο pivot.

Ανάλυση Διαχωρισμού

- Χρόνος εκτέλεσης **partition** :
  - Κάθε στοιχείο συγκρίνεται με pivot μία φορά (εκτός από στοιχεία εκατέρωθεν σημείου χωρισμού).
  - Τελικά *i* και *j* «δείχνουν» είτε γειτονικές είτε ίδια θέση γιατί όπου πέρασε το *i* δεν συνεχίζει *j*.
  - Χρόνος εκτέλεσης **partition για n στοιχεία = Θ(n).**
- Μετά τον διαχωρισμό, στοιχεία δεν αλλάζουν «πλευρά» (δηλ. αριστερά μένουν αριστερά, δεξιά μένουν δεξιά).
- Υπάρχουν πολλές άλλες μορφές διαίρεσης, π.χ. pivot παίρνει τελική του θέση στον πίνακα, διαίρεση στα τρία, …

Παράδειγμα Quicksort



Ορθότητα Quicksort

- Συνέπεια ορθότητας **partition** :
  - Τερματισμός : μέγεθος υπο-ακολουθιών ≤ *n* − 1.
  - Ταξινόμηση :
    - Αριστερά στοιχεία ≤ pivot ≤ δεξιά στοιχεία.
    - Επαγωγικά, αριστερή περιοχή και δεξιά περιοχή ταξινομημένες.
    - Συνολικά, πίνακας ταξινομημένος.

Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

- Χρόνος εκτελ. αναδρομικών αλγ. με διατύπωση και λύση αναδρομικής εξίσωσης.
- Χρόνος εκτέλεσης **partition**(n στοιχεία) : $\Theta(n)$
- ***T*(*n*)** : χρόνος (χ.π.) για ταξινόμηση n στοιχείων.
  - **Θ(*n*)** : αναδιάταξη και διαίρεση εισόδου.
  - ***T*(*k*)** : ταξινόμηση αριστερού τμήματος (k στοιχεία).
  - ***T*(*n* – *k*)** : ταξινόμηση δεξιού τμήματος ($n - k$ στοιχεία).

$$T(n) = \Theta(n) + \max_{1 \le k \le n-1}\{T(k) + T(n-k)\}\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

$$T(n) = \Theta(n) + \max_{1 \le k \le n-1}\{T(k) + T(n-k)\}\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

- Χειρότερη περίπτωση : $k = 1$ ή $k = n - 1$ (σε κάθε κλήση).
  - Ουσιαστικά δεν γίνεται διαίρεση (μόνο αναδιάταξη) !
  - Partition «βοηθάει ελάχιστα» τον αλγόριθμο.

$$T(n) = \Theta(n) + T(n-1) + T(1)\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n-1) + \Theta(n-2) + \cdots + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

- Στιγμιότυπα που quicksort χρειάζεται χρόνο $\Omega(n^2)$;

Χρόνος Εκτέλεσης

- **Καλύτερη περίπτωση** : $k = n / 2$ (σε κάθε κλήση).
  - Ουσιαστικά τέλεια διαίρεση !
  - Partition «βοηθάει τα μέγιστα» !

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Αν $\min\{k, n-k\} \ge 3n/4$ (περίπου ίδιο μεγέθος)
  $$T(n) = \Theta(n) + T(n/4) + T(3n/4) \;\Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$
- Χειρότερη και καλύτερη περίπτωση σπάνιες !
- Αν τυχαίο στοιχείο pivot,
  πιθανότητα διαίρεσης ($n / 4$, $3n / 4$) ή καλύτερης ≥ **1/2** !

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Πιθανοτική Quicksort

- Τυχαίο στοιχείο σαν στοιχείο χωρισμού (pivot).
- Για κάθε $k \in [n-1]$,
  πιθανότητα διαίρεσης (k, $n - k$) = $\dfrac{1}{n-1}$

```
randomQuickSort(int A[], int left, int right) {
  if (left >= right) return; // At most 1 element
  pivot = random(left, right);
  swap(A[left], A[pivot]);
  q = partition(A, left, right);
  randomQuickSort(A, left, q);
  randomQuickSort(A, q+1, right);    }
```

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

$$S(n) = \Theta(n) + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}[S(k) + S(n-k)]$$
$$= \Theta(n) + \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} S(k)$$

- Λύση αναδρομής : $S(n) = \Theta(n \log n)$
  Αυτός ο χρόνος εκτέλεσης με μεγάλη πιθανότητα !
- Πιθανότητα διαίρεσης (n / 4, 3n / 4) ή καλύτερης ≥ **1/2** !
  - Κατά «μέσο όρο», κάθε 2 επίπεδα στο δέντρο της αναδρομής, έχουμε «επιτυχημένη» διαίρεση.
  - Σε κάθε επίπεδο, συνολικός χρόνος διαίρεσης Θ(n).
  - Θ($n \log n$) από «επιτυχημένες» διαιρέσεις + Θ($n \log n$) από «αποτυχημένες» διαιρέσεις.

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- Πιθανότητα «αποτυχημένες» διαιρέσεις > $c \log n$ είναι εξαιρετικά μικρή !
  - Χρόνος εκτέλεσης Θ($n \log n$) με **μεγάλη πιθανότητα** !
- Μέση περίπτωση δεν εξαρτάται από είσοδο !
  Αφορά στη συμπεριφορά του αλγόριθμου.
- Εξαιρετικά μικρή πιθανότητα χειρότερης περίπτωσης.
  - Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης δεν έχει νόημα !

Σύνοψη

- Γρήγορη ταξινόμηση (quicksort):
  - Πιθανοτικός αλγόριθμος.
  - Χρόνος χειρότερης περ. : Θ(n^2)
  - Χρόνος μέσης περίπτωσης : Θ($n \log n$)
  - Χώρος : σχεδόν in-place.
  - Αναδρομή καθυστερεί και απαιτεί μνήμη.
  - Εύκολη και γρήγορη υλοποίηση.
  - Γρηγορότερος αλγόριθμος στην πράξη (για n ≥ 30).

Σύνοψη

Αλγόριθμος	Καλύτερη	Μέση	Χειρότερη	Χώρος
BubbleS	Ω(n)	O(n^2)	O(n^2)	O(1)
InsertionS	Ω(n)	O(n^2)	O(n^2)	O(1)
SelectionS	Ω(n)	O(n^2)	O(n^2)	O(1)
HeapS	Ω($n \log n$)	O($n \log n$)	O($n \log n$)	O(1)
MergeS	Ω($n \log n$)	O($n \log n$)	O($n \log n$)	O(n)
QuickS	Ω($n \log n$)	O($n \log n$)	O(n^2)	?

Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι

- Ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι:
  - Προκαθορισμένη συμπεριφορά για κάθε είσοδο.
  - Υπάρχει χειρότερη περίπτωση και μπορεί να συμβεί.
- Πιθανοτικοί αλγόριθμοι:
  - Συμπεριφορά από είσοδο και τυχαίες επιλογές.
  - Χρήση τυχαιότητας ώστε χειρότερη περίπτωση να συμβαίνει με πολύ μικρή πιθανότητα.
  - Ποια είναι η χειρότερη περ. για πιθανοτική quicksort;
  - Χρόνος (απόδοση) κατά μέση τιμή.
Ορθότητα με μεγάλη πιθανότητα.
  - Las-Vegas: αποτέλεσμα σωστό, χρόνος τυχαία μετ/τη.
  - Monte-Carlo: χρόνος προκαθορισμένος, μπορεί λάθος αποτέλεσμα (αλλά με πολύ μικρή πιθανότητα).