

# Επιλογή

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Πρόβλημα Επιλογής

- Πίνακας  $A[ ]$  με  $n$  στοιχεία (όχι ταξινομημένος).  
Αριθμός  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .
- Υπολογισμός του  $k$ -οστού μικρότερου στοιχείου  
(στοιχείο θέσης  $A[k]$  αν  $A$  ταξινομημένος).
  - $k = 1$ : ελάχιστο.  $k = n$ : μέγιστο.
  - $k = n/2$ : ενδιάμεσο (median).

5 3 2 6 4 1 3 7

Ελάχιστο : 1

Μέγιστο : 7

Ενδιάμεσο : 3

# Εφαρμογές

- Υπολογισμός **στατιστικού ενδιάμεσου** (median).
  - Χρήσιμες πληροφορίες για κατανομή.
  - Ανήκει η Ελλάδα στο φτωχότερο 25% των χωρών ΕΕ;
  - Ανήκει κάποιος φοιτητής στο καλύτερο 10% του έτους του;
- **Ισομερής διαίρεση** (partition) πίνακα σε **ομάδες «ταξινομημένες»** μεταξύ τους.
- Ενδιαφέρον **αλγοριθμικό πρόβλημα!**

# Μέγιστο / Ελάχιστο

- **Μέγιστο** (ελάχιστο) εύκολα σε **χρόνο  $\Theta(n)$** ,  
με  **$n - 1$  συγκρίσεις** μεταξύ στοιχείων.

```
int maximum(int A[], int n) {
    int max = A[0], i;
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (A[i] > max) max = A[i];
    return(max); }
```
- Μέγιστο και ελάχιστο με  **$3n/2 - 2$  συγκρίσεις ! Πώς;**

## Κάτω Φράγμα για Μέγιστο

- Κάθε ντετερμινιστικός συγκριτικός αλγόριθμος χρειάζεται  $\geq n - 1$  συγκρίσεις για μέγιστο (ελάχιστο).
  - «Πρωτάθλημα» μεταξύ στοιχείων.
  - Σύγκριση στοιχείων : αγώνας όπου κερδίζει μεγαλύτερο.
  - Κάθε «αήττητο» στοιχείο είναι υποψήφιο μέγιστο.
  - Για μοναδικό μέγιστο, πρέπει τα υπόλοιπα να «ηττηθούν».
  - Κάθε αγώνας δίνει ένα «ηττημένο» στοιχείο
  - $\geq n - 1$  αγώνες / συγκρίσεις για μοναδικό μέγιστο.

## Επιλογή

- Σε χρόνο  $O(n \log n)$  με ταξινόμηση.
- Μέγιστο ( $k = 1$ ), ελάχιστο ( $k = n$ ) :  
Γραμμικό χρόνο  $\Theta(n)$ .
- Άλλες τιμές  $k$  : χρόνος  $O(n \log n)$  ή  $O(n)$ ;
- Επιλογή σε γραμμικό χρόνο με διαιρεί-και-βασίλευε βασισμένη σε διαχωρισμό της quicksort !

## Πιθανοτική Quickselect

- Έστω υπο-πίνακας  $A[l..r]$  και αναζητούμε  $k$ -οστό στοιχείο.
- **Τυχαίο** στοιχείο διαχωρισμού (pivot).
- **Αναδιάταξη** και **διαίρεση** εισόδου σε δύο υπο-ακολουθίες:
  - Στοιχεία αριστεράς  $[l..q]$  υπο-ακολ.  $\leq$  στοιχείο διαχωρισμού.
  - Στοιχεία δεξιάς  $[q+1..r]$  υπο-ακολ.  $\geq$  στοιχείο διαχωρισμού.
- Αν  $k \leq q-l+1$ , αναδρομική λύση ( $A[l..q]$ ,  $k$ )  
Αν  $k > q-l+1$ , αναδρομική λύση ( $A[q+1..r]$ ,  $k-(q-l+1)$ )

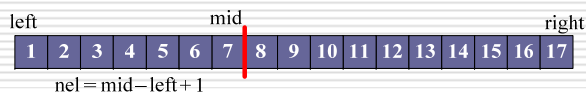


## Πιθανοτική Quickselect

```
int RQuickSelect(int A[], int left, int right, int k)
{
    if (left == right) return(A[left]); // 1 στοιχείο
    pivot = random(left, right); // τυχαίο pivot
    swap(A[left], A[pivot]);
    mid = partition(A, left, right); // διαίρεση
    nel = mid + 1 - left; // #στοιχείων στο αριστερό μέρος
    if (k <= nel) return(RQuickSelect(A, left, mid, k));
    else return(RQuickSelect(A, mid+1, right, k - nel));
}
```

## Ορθότητα Quickselect

- **Τερματισμός** : μέγεθος υπο-ακολουθιών  $\leq n - 1$ .
- Επαγωγικά υποθέτω ότι  $1 \leq k \leq \text{right} - \text{left} + 1$ .
  - Αν  $1 \leq k \leq \text{mid}$ , δεξιά στοιχεία «αποκλείονται».
  - Αν  $\text{mid} < k \leq \text{right} - \text{left} + 1$ , αριστερά στοιχεία «αποκλείονται» και  $k$  μειώνεται αντίστοιχα ( $k = k - \text{nel}$ ).



## Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

- Χρόνος εκτελ. **αναδρομικών αλγ.** με διατύπωση και λύση **αναδρομικής εξίσωσης** λειτουργίας.
- **$T(n)$**  : χρόνος (χ.π.) για **επιλογή** από  $n$  στοιχεία.
- Χρόνος εκτέλεσης **partition**( $n$  στοιχεία) :  $\Theta(n)$
- Χειρότερη περίπτωση : **ένα στοιχείο «αποκλείεται»** σε κάθε διαίρεση!

$$T(n) = \Theta(n) + T(n - 1), \quad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n - 1) + \Theta(n - 2) + \dots + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

- **Πιθανοτικός αλγ.**: χειρότερη περίπτωση έχει **εξαιρετικά μικρή πιθανότητα** να συμβεί (για κάθε είσοδο) !

## Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- **Τυχαίο στοιχείο** σαν στοιχείο χωρισμού (pivot).
- Για κάθε  $i \in [n - 1]$ ,

$$\text{πιθανότητα διαίρεσης } (i, n - i) = \frac{1}{n - 1}$$

$$S(n) = \Theta(n) + \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^{n-1} S(\max\{i, n - i\})$$

$$= \Theta(n) + \frac{2}{n - 1} \sum_{i=n/2}^{n-1} S(i)$$

- Λύση αναδρομής :  **$S(n) = \Theta(n)$**

## Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- **Καλή περίπτωση** : διαίρεση ( $n/4, 3n/4$ ) ή καλύτερη.
  - Τουλάχιστον  $n/4$  στοιχεία «αποκλείονται».
- Πιθανότητα «καλής περίπτωσης»  $\geq 1/2$  !
  - Κατά «μέσο όρο», μία «κακή διαίρεση» πριν από «καλή διαίρεση» που **μειώνει στοιχεία** από  $n$  σε  $\leq 3n/4$ .

$$S(n) = \Theta(n) + S(3n/4)$$

- Λύση αναδρομής:  **$S(n) = \Theta(n)$**

- Γεωμετρική σειρά :

$$S(n) \leq cn + \frac{3}{4}cn + \left(\frac{3}{4}\right)^2cn + \left(\frac{3}{4}\right)^3cn + \dots + c = \Theta(n)$$



## Ντετερμινιστική Επιλογή

- ❑ «Καλή διαίρεση» ντετερμινιστικά:
  - Χρήση ρινοτ **κοντά** στο ενδιάμεσο: πρόβλημα επιλογής!
  - Φαύλος κύκλος : γρήγορη επιλογή → καλή διαίρεση → γρήγορη επιλογή.
- ❑ Προσεγγιστική επιλογή : όχι «ενδιάμεσο» αλλά «κοντά στο ενδιάμεσο» για ρινοτ.
  - Επιλογή **κατάλληλου** δείγματος (π.χ.  $n/5$  στοιχεία).
  - Ενδιάμεσο δείγματος είναι «κοντά στο ενδιάμεσο» για σύνολο στοιχείων.
  - Αναδρομικά ενδιάμεσο στοιχείο του δείγματος.
  - Ενδιάμεσο δείγματος για ρινοτ εγγυάται «καλή διαίρεση».

## Ντετερμινιστική Επιλογή

- ❑ Δείγμα: Χωρίζουμε στοιχεία σε 5άδες.  
Βρίσκουμε ενδιάμεσο κάθε 5άδας:  $n/5$  στοιχεία.
  - Χρόνος :  $\Theta(n)$ .
- ❑ Αναδρομικά, ενδιάμεσο στοιχείο δείγματος.
  - Χρόνος :  $T(n/5)$
- ❑ Διαίρεση με ενδιάμεσο δείγματος σαν ρινοτ.
  - Χρόνος :  $\Theta(n)$ .
  - Μεγαλύτερος υποπίνακας έχει  $\leq 7n/10$  στοιχεία.
- ❑ Αναδρομική επιλογή: χρόνος  $T(7n/10)$

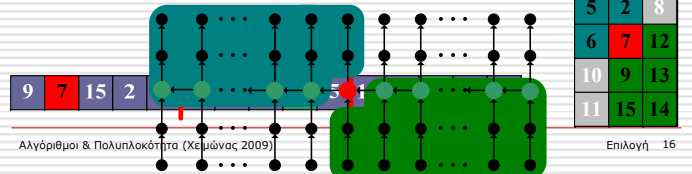


## Ντετερμινιστική Επιλογή

- ❑ Χρόνος χειρότερης περίπτωσης:  
 $T(n) \leq \Theta(n) + T(n/5) + T(7n/10)$ ,  $T(1) = \Theta(1)$
- ❑ Λύση αναδρομής :  $T(n) = \Theta(n)$
- ❑ Ντετερμινιστική επιλογή σε γραμμικό χρόνο!

## Ενδιάμεσο Δείγματος

- ❑ Διαίρεση με ενδιάμεσο δείγματος σαν ρινοτ.
  - Μεγαλύτερος υποπίνακας  $\leq 7n/10$  στοιχεία.
  - Μικρότερος υποπίνακας  $\geq 3n/10$  στοιχεία.
- ❑ Ταξινομούμε 5άδες και βάζουμε σε αύξουσα σειρά των ενδιάμεσων στοιχείων τους (δείγματος).
- ❑ Ενδιάμεσος δείγματος στη  $(n/10)$ -οστή στήλη.
- ❑ Ενδιάμεσος δείγματος  $\geq 3 \times n/10$  στοιχεία.  
Ενδιάμεσος δείγματος  $\leq 3 \times n/10$  στοιχεία.



## Σύνοψη

---

- Γρήγορη επιλογή (quickselect):
  - Πιθανοτικός αλγόριθμος με γραμμικό χρόνο (μ.π.)
  - Ντετερμινιστικός αλγόριθμος με γραμμικό χρόνο (χ.π.)
  - Ντετερμινιστικός αλγόριθμος με «bootstrapping»:
    - Για να βρω ενδιάμεσο για πολλά στοιχεία, βρίσκω ενδιάμεσο για λίγα.
    - Αυτό βοηθάει να βρω ενδιάμεσο για περισσότερα, ...

## Ασκήσεις

---

- Τροποποίηση quicksort ώστε  $O(n \log n)$  χρόνο σε χειρότερη περίπτωση. Είναι πρακτικό;
- $T(n) = \Theta(n) + T(n/c) + T(n/d)$ ,  $T(1) = \Theta(1)$ 
  - $1/c + 1/d < 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$
  - $1/c + 1/d = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$
- Στον ντετερμινιστικό αλγόριθμο, χωρίζω στοιχεία σε 3άδες (7άδες). Τι συμβαίνει;
- A και B δύο ταξινομημένοι πίνακες με  $n$  διαφορετικά στοιχεία ο καθένας. Σε χρόνο  $O(\log n)$ , το ενδιάμεσο της ένωσης των A και B.