

Αναζήτηση Κατά Πλάτος

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

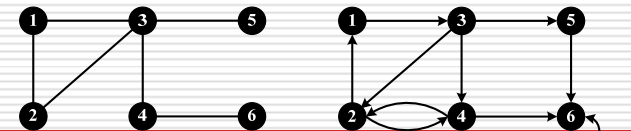
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Γραφήματα

- **Μοντελοποίηση** πολλών σημαντικών προβλημάτων (π.χ. δίκτυα - συνεκτικότητα, διαδρομές, δρομολόγηση - ανάθεση πόρων, layouts, ...).
- Γράφημα $G(V, E)$: V κορυφές
 E ακμές (ζεύγη σχετιζόμενων κορυφών)
 - Τάξη $|V| = n$, και μέγεθος $|E| = m$.
 - Κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα, **απλά μη-κατευθ.**
 - Βάρη (μήκη) στις ακμές $G(V, E, w)$, $w : E \mapsto \mathbb{R}$

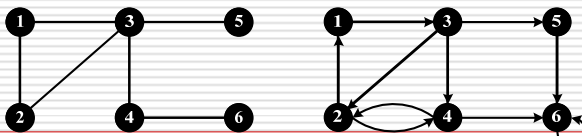


Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα (Χειμώνας 2009)

Αναζήτηση Κατά Πλάτος 2

Γραφήματα

- **Βαθμός** κορυφής $deg(u)$: #ακμών εφαιπόμενων στη u .
 - Κατευθυνόμενα: **εισερχόμενος** και **εξερχόμενος** βαθμός.
 - Μη-κατευθυνόμενο $G(V, E)$: $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$
- Διαδρομή, μονοκονδυλιά, **μονοπάτι** (απλό).
- Κλειστή διαδρομή, κύκλωμα, **κύκλος** (απλός).
- **Απόσταση** $d(u, v)$ (χωρίς και με βάρη).
- **Συνεκτικό**: μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών.
- **Δέντρο**: ακυκλικό συνεκτικό γράφημα. **Δάσος**.

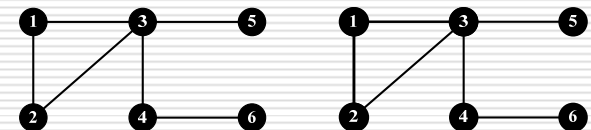


Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα (Χειμώνας 2009)

Αναζήτηση Κατά Πλάτος 3

Υπο-Γραφήματα

- **Υπογράφημα** $G'(V', E')$ του $G(V, E)$ όταν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.
 - **Επικάλυπτον** (spanning) όταν $V' = V$, δηλ. έχει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος.
 - **Επαγόμενο** (induced) όταν $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$ δηλ. έχει όλες τις ακμές του αρχικού μεταξύ των επιλεγμένων κορυφών.



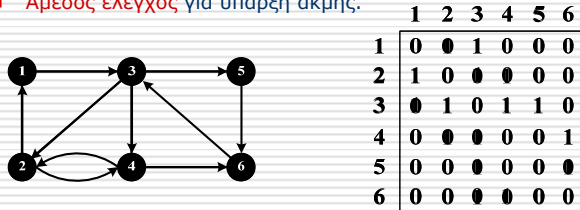
Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα (Χειμώνας 2009)

Αναζήτηση Κατά Πλάτος 4

Αναπαράσταση Γραφημάτων

□ ... με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$

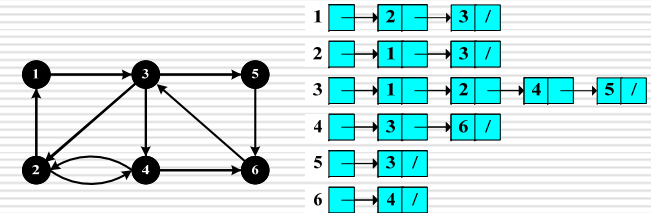
- Αν έχουμε βάρη, $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- Μη-κατευθυνόμενο: **συμμετρικός** πίνακας.
- Χώρος $\Theta(n^2)$.
- Άμεσος έλεγχος για ύπαρξη ακμής.



Αναπαράσταση Γραφημάτων

□ ... με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.

- Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους.
- Χώρος $\Theta(m)$.
- Έλεγχος για ύπαρξη ακμής σε χρόνο $O(\deg(u))$.

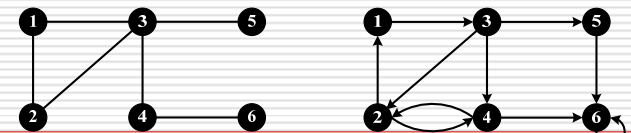


Ασκήσεις

- **Μετατροπή** από μία αναπαράσταση σε άλλη;
- Τετράγωνο $G^2(V, E')$ γραφήματος $G(V, E)$ έχει ακμές μεταξύ κορυφών σε απόσταση ≤ 2 στο G .
 - Δίνεται λίστα (πίνακας) γειτνίασης του αρχικού γραφήματος.
 - Να υπολογισθεί λίστα (πίνακας) γειτνίασης **τετραγώνου**.
 - Ποιοι είναι οι αντίστοιχοι **χρόνοι εκτέλεσης**;
- **Ανάστροφο** (κατευθυνόμενο) γράφημα $G^T(V, E')$ προκύπτει από αρχικό γράφημα $G(V, E)$ με **αντιστροφή φοράς ακμών**.
 - Δίνεται λίστα (πίνακας) γειτνίασης του αρχικού γραφήματος.
 - Να υπολογισθεί λίστα (πίνακας) γειτνίασης **ανάστροφου**.
 - Ποιοι είναι οι αντίστοιχοι **χρόνοι εκτέλεσης**;

Εξερεύνηση Γραφημάτων

- Συστηματική «επίσκεψη» όλων των κορυφών και ακμών και εξαγωγή **συμπερασμάτων** σχετικά με **βασικές ιδιότητες**:
 - (Ισχυρά) συνεκτικές συνιστώσες.
 - Διμερές γράφημα.
 - Γέφυρες και σημεία κοπής.
 - Τοπολογική διάταξη για DAG.
 - ...



Αναζήτηση Κατά Πλάτος (BFS)

- Εκκίνηση από **αρχική κορυφή s** και εξέλιξη σε **φάσεις**.
 - 1^η φάση: εξερεύνηση **γειτόνων s** (σε απόσταση 1 από s).
 - 2^η φάση: εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών 1^{ης} φάσης** που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε απόσταση 2 από s).
 - 3^η φάση: εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών 2^{ης} φάσης** που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε απόσταση 3 από s).
 -
 - φάση k: εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών φάσης k - 1** που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε απόσταση k από s).
- «Κατά Πλάτος»: ολοκληρώνει **εξερεύνηση κορυφών σε απόσταση k από s πριν** επεκταθεί σε κορυφές σε απόσταση k+1.
- Εξέλιξη αναζήτησης: **BFS-δάσος**.

Αναζήτηση Κατά Πλάτος (BFS)

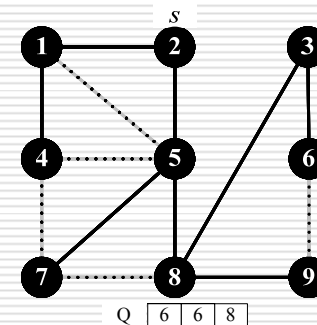
- **Τρία είδη** κορυφών:
 - **Ανεξερεύνητη**: όχι επίσκεψη ακόμη.
 - **Υπο-εξέταση**: επίσκεψη αλλά όχι εξερεύνηση γειτόνων.
 - **Εξερευνημένη**: επίσκεψη και εξερεύνηση γειτόνων.
- Κορυφές περνούν από παραπάνω στάδια με αυτή τη σειρά.
 - Αρχικά όλες οι κορυφές **ανεξερεύνητες**.
 - Πρώτη επίσκεψη ανεξερεύνητης κορ. → **υπό-εξέταση**.
 - Επίσκεψη των γειτόνων υπο-εξέταση κορ. → **εξερευνημένη**.
- «Κατά Πλάτος»: σειρά που **γίνονται υπο-εξέταση ίδια με σειρά** που γίνονται **εξερευνημένες**.
 - **(FIFO) ουρά**: εισαγωγή όταν γίνονται υπο-εξέταση και εξαγωγή για εξερεύνηση γειτόνων.

Υλοποίηση

- Πίνακας κατάστασης: $m[v] = \{ A, Y, E \}$.
- Πίνακας προγόνων: $p[v]$ = πατέρας v στο BFS-δάσος.
- Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(n + m)$.

```
BFS(G(V, E), s)
  addToQueue(s); m[s] ← Y; p[s] ← NULL;
  for all v ∈ V \ {s} do
    m[v] ← A; p[v] ← NULL;
  while not emptyQueue() do
    u ← extractFromQueue(); m[u] ← E;
    for all v ∈ L[u] do
      if m[v] = A then
        addToQueue(v); m[v] ← Y; p[v] ← u;
```

Παράδειγμα



Παραδείγματα – Ιδιότητες

- BFS σε (α) πλήρες γράφημα, (β) δέντρο, (γ) κύκλο.
- Ψευδοκώδικας ολοκληρώνεται με κορυφές εξερευνημένες ή ανεξερευνητες.
 - Αν γράφημα συνεκτικό, όλες εξερευνημένες.
 - Αν όχι, εξερευνημένες σε ίδια συνεκτική συνιστώσα με s . Υπόλοιπες ανεξερευνητες
 - Τροποποίηση για ολοκλήρωση με όλες εξερευνημένες;

Ιδιότητες

- BFS-Δάσος: υπογράφημα $G_p(V_p, E_p)$ εξερευνημένων κορυφών και ακμών από όπου έγινε πρώτη επίσκεψη.
 $V_p = \{v \in V : m[v] = E\}$ και $E_p = \{(p[v], v) \in E : v \in V_p \setminus \{s\}\}$
 - Νδο ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα συνεκτικό ανν BFS παράγει **spanning tree**.
 - Τροποποίηση για συνεκτικές συνιστώσες;
 - **Συνεκτικό** γράφημα: BFS δέντρο είναι δέντρο συντομότερων μονοπατιών από s (ακμές θεωρούνται μοναδιαίου μήκους).
 - Πώς υπολογίζουμε **αποστάσεις**;
- Γραμμικός αλγόριθμος για αναγνώριση **διμερών γραφημάτων**;

