

# Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**  
 Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

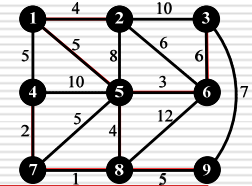
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
 και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (MST)

- Συνεκτικό μη-κατευθ.  $G(V, E, w)$  με βάρη  $w: E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$ 
  - Βάρος υπογραφήματος  $T(V, E_T): w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$
- Ζητούμενο: ελάχιστου βάρους **συνεκτικό** υπογράφημα που καλύπτει όλες τις κορυφές.
  - Συνεκτικό (εξ' ορισμού) + ακυκλικό (ελάχιστο)  $\Rightarrow$  Δέντρο.
  - Minimum Spanning Tree (MST, ΕΣΔ).
- Πρόβλημα συνδυαστ. βελτιστοποίησης με πολλές και σημαντικές εφαρμογές.
  - Σχεδιασμός συνδετικού δικτύου (οδικού, τηλεπ/κου, ηλεκτρικού) με ελάχιστο κόστος.

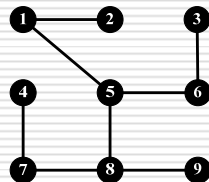


Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα (Χειμώνας 2009)

Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 2

# Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Δέντρο: **συνεκτικό** και **ακυκλικό** γράφημα.
- Για κάθε απλό μη-κατευθ. γράφημα  $T(V, E)$ , τα παρακάτω είναι **ισοδύναμα**:
  - $T$  δέντρο.
  - Κάθε ζευγάρι κορυφών ενώνεται με **μοναδικό μονοπάτι**.
  - $T$  συνεκτικό και  $|E| = |V| - 1$ .
  - $T$  ακυκλικό και  $|E| = |V| - 1$ .
  - $T$  ελαχιστοτικά συνεκτικό.
  - $T$  μεγιστοτικά ακυκλικό.

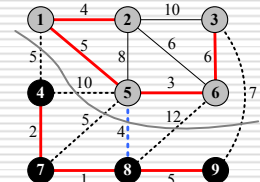


Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα (Χειμώνας 2009)

Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 3

# Τομές, Σύνολα Τομής, και ΕΣΔ

- Τομή  $(S, V \setminus S)$ : διαμέριση κορυφών σε 2 σύνολα  $S, V \setminus S$ .
- Σύνολο τομής  $\delta(S, V \setminus S)$ : ακμές ένα άκρο στο  $S$  και άλλο άκρο στο  $V \setminus S$ .
  - $\delta(S, V \setminus S)$ : όλες οι ακμές που **διασχίζουν** τομή  $(S, V \setminus S)$ .
- Σύνολο ακμών  $E'$  **διασχίζει** τομή  $(S, V \setminus S)$  αν  $E' \cap \delta(S, V \setminus S) \neq \emptyset$ .
- (Ε)ΣΔ ορίζεται από σύνολο ακμών (ελάχιστου) βάρους που **διασχίζει** όλες τις τομές.
  - Άπληστη στρατηγική: ενόσω «αγεφύρωτη» τομή, διέσχισέ την με ακμή ελάχιστου βάρους.

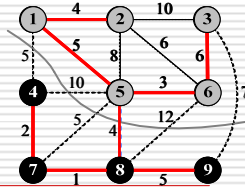


Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα (Χειμώνας 2009)

Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 4

## (Άπληστος) Υπολογισμός ΕΣΔ

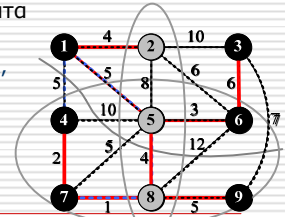
- Έστω  $T(V, E_T)$  ΕΣΔ για  $G(V, E, w)$ .
- Αφαιρώντας ακμή  $e$  από  $E_T$  προκύπτουν δύο συνεκτικές συνιστώσες, έστω  $S$  και  $V \setminus S$  αντίστοιχα σύνολα κορυφών.
  - $G_S$  και  $G_{V \setminus S}$  αντίστοιχα επαγόμενα υπογραφήματα, και  $T_S$  και  $T_{V \setminus S}$  αντίστοιχα υποδέντρα.
- Αρχή **βελτιστότητας**:
  - $T_S$  αποτελεί ΕΣΔ για  $G_S$  και  $T_{V \setminus S}$  αποτελεί ΕΣΔ για  $G_{V \setminus S}$ .
- Ιδιότητα **άπληστης επιλογής**:
  - $e$  είναι μια ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει τομή  $(S, V \setminus S)$ .
- **Άπληστος αλγόριθμος** για ΕΣΔ!



Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 5

## Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

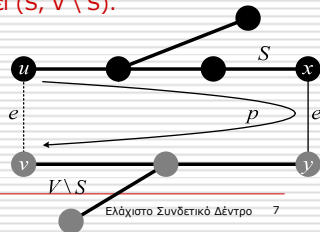
- Έστω  $\Delta$  δάσος (σύνολο ακμών χωρίς κύκλους).
- Ακμή  $e \notin \Delta$  είναι **ακμή επαύξησης** για  $\Delta$  αν:
  - $e$  διασχίζει μια τομή  $(S, V \setminus S)$  που δεν διασχίζει το  $\Delta$ , και
  - $e$  είναι ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών  $\delta(S, V \setminus S)$ .
- Ακμή επαύξησης για δάσος  $\Delta$  συνιστά άπληστη επιλογή που σε  $|V|-1$  βήματα οδηγεί σε ΕΣΔ:
  - Αν  $\Delta$  δάσος και  $e$  ακμή επαύξησης  $\Delta$ ,  $\Delta \cup \{e\}$  δάσος.
    - $e$  δεν δημιουργεί κύκλο.
  - Αν  $\Delta \subset \text{ΕΣΔ}$  και  $e$  ακμή επαύξησης  $\Delta$ ,  $\Delta \cup \{e\} \subseteq \text{ΕΣΔ}$ .



Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 6

## Άπληστη Επιλογή: Ορθότητα

- Έστω δάσος  $\Delta \subset \text{ΕΣΔ}$  και  $e = \{u, v\}$  **ακμή επαύξησης**  $\Delta$ . Τότε  $\Delta \cup \{e\} \subseteq \text{ΕΣΔ}$ .
  - $(S, V \setminus S)$  τομή που δεν διασχίζει  $\Delta$  και διασχίζει η ακμή  $e$ .
  - $e$  ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του  $\delta(S, V \setminus S)$ .
  - Έστω  $T$  ΕΣΔ τ.ω.  $\Delta \subseteq T$ . Υποθέτουμε ότι  $\Delta \cup \{e\} \notin T$ .
  - Έστω  $p$  μονοπάτι  $u - v$  στο  $T$ , και  $e' = \{x, y\}$  ακμή  $T$  που διασχίζει  $(S, V \setminus S)$ .
  - Αφού  $w(e) \leq w(e')$ , και το  $T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$  είναι ΕΣΔ:  $w(T') = w(T) + w(e) - w(e') \leq w(T)$
  - Επιπλέον,  $\Delta \subseteq T' \setminus \{e\} \Rightarrow \Delta \cup \{e\} \subseteq T'$



Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο 7

## Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

```

MST( $G(V, E, w)$ )
 $\Delta \leftarrow \emptyset;$ 
while  $|\Delta| < |V| - 1$  do
    Υπολόγισε μια ακμή επαύξησης  $e$  για  $\Delta$ ;
     $\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e\};$ 
return( $\Delta$ );
    
```

- Αρχικά  $\Delta = \emptyset$  δάσος και **υποσύνολο** κάθε ΕΣΔ.
- Επαγωγικά,  $e$  ακμή επαύξησης για  $\Delta$ :
  - $\Delta \cup \{e\}$  δάσος και **υποσύνολο** κάποιου ΕΣΔ.
- Όταν  $|\Delta| = |V| - 1$ ,  $\Delta$  δέντρο, άρα και ΕΣΔ.

# Αλγόριθμος Kruskal

MST-Kruskal( $G(V, E, w)$ )

Ταξινομήσε ακμές σε αύξουσα σειρά βάρους,  $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_m)$ .

$\Delta \leftarrow \emptyset; i \leftarrow 1;$

**while**  $|\Delta| < |V| - 1$  **and**  $i \leq m$  **do**

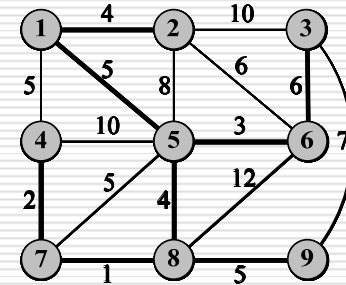
**if**  $\Delta \cup \{e_i\}$  **den έχει κύκλο then**

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e_i\};$

$i \leftarrow i + 1;$

- Υλοποίηση: κύκλος στο  $\Delta \cup \{e_i\}$  ελέγχεται με Union-Find.
  - Χρόνος εκτέλεσης:  $\Theta(m \log m)$ .
- **Ορθότητα:** αν  $e_i$  προστεθεί τότε ακμή επαύξησης για  $\Delta$ :
  - Όχι κύκλος, άρα  $e_i$  διασχίζει μια τομή που δεν διασχίζει το  $\Delta$ .
  - Αύξουσα σειρά βάρους:  $e_i$  ελάχιστου βάρους (πρώτη που ελέγχεται) από όσες ακμές διασχίζουν συγκεκριμένη τομή.

# Αλγόριθμος Kruskal: Παράδειγμα



# Αλγόριθμος Prim

□ **Υλοποίηση:**

- Ελάχιστο  $c[v]$ : ουρά προτεραιότητας.
- Binary heap:  $\Theta(m \log n)$
- Fibonacci heap:  $\Theta(m + n \log n)$

□ **Ορθότητα:**

- $\{v, p[v]\}$  αποτελεί ακμή επαύξησης:
  - Διασχίζει τομή  $(S, V \setminus S)$ .
  - Ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του  $\delta(S, V \setminus S)$ .

MST-Prim( $G(V, E, w), s$ )

**for all**  $u \in V$  **do**

$c[u] \leftarrow \infty; p[u] \leftarrow \text{NULL};$

$c[s] \leftarrow 0; S \leftarrow \emptyset; \Delta \leftarrow \emptyset;$

**while**  $|S| < |V|$  **do**

$u \notin S : c[u] = \min_{v \notin S} \{c[v]\};$

$S \leftarrow S \cup \{u\};$

**for all**  $v \in \text{AdjList}[u]$  **do**

**if**  $v \notin S$  **and**  $w(u, v) < c[v]$  **then**

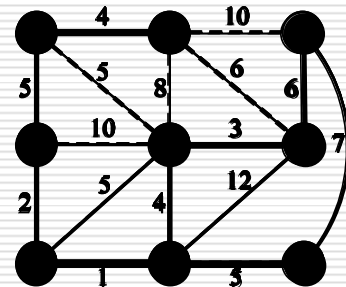
$c[v] \leftarrow w(u, v);$

$p[v] \leftarrow u;$

**if**  $p[u] \neq \text{NULL}$  **then**

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{u, p[u]\};$

# Αλγόριθμος Prim: Παράδειγμα



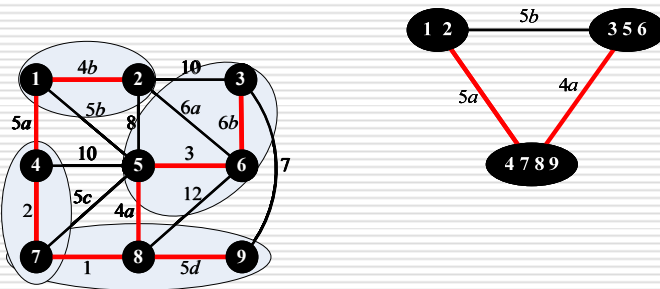
## Κανόνες Σχηματισμού ΕΣΔ

- Ακμή  $e$  που για κάποια τομή  $(S, V \setminus S)$ , αποτελεί **ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει τομή  $(S, V \setminus S)$** :
  - $e$  **ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
  - Γρήγορη επιλογή τέτοιων ακμών χωρίς κύκλους, και **ένταξη** σε ΕΣΔ.
- Ακμή  $e$  που για κάποιον κύκλο  $C$  αποτελεί **μέγιστου βάρους ακμή κύκλου  $C$** :
  - Αν βάρος  $e$  **μεγαλύτερο** από βάρος άλλων ακμών του  $C$ , **δεν ανήκει** σε κανένα ΕΣΔ.
  - Αν όλες οι ακμές του  $C$  έχουν ίδιο βάρος, **δεν ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
  - Ενόσω υπάρχει κύκλος  $C$ , **αποκλεισμός** (μιας) βαρύτερης ακμής  $C$ .

## Αλγόριθμος Borunka

- «Παράλληλη» εκδοχή γενικού άπληστου αλγόριθμου.
  - Αρχικά κάθε κορυφή αποτελεί μία συνεκτική συνιστώσα.
  - Φάση: ενόσω  $\#$ συνεκτικών συνιστώσων  $> 1$ :
    - Κάθε συνεκτική συνιστώσα  $\sigma$  επιλέγει στο ΕΣΔ την **ελαφρύτερη** ακμή με ένα άκρο στο  $\sigma$  (ακμή επαύξεσης).
      - Μια ακμή μπορεί να επιλεγεί και από τα δύο άκρα της.
      - Απαραίτητη ολική διάταξη των ακμών, διαφορετικά μπορεί να σχηματιστούν κύκλοι.
    - Συνεκτικές συνιστώσες **ενημερώνονται** με βάση ακμές που επιλέχθηκαν στην τρέχουσα φάση.
- Αν υπάρχει **ολική διάταξη ακμών**, υπολογίζει ΕΣΔ.
  - Κάθε ακμή που επιλέγεται, αποτελεί ακμή επαύξεσης: ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει μία τομή.
  - Όχι κύκλοι: **μοναδική** ελαφρύτερη ακμή διασχίζει κάθε τομή.

## Αλγόριθμος Borunka: Παράδειγμα



## Αλγόριθμος Borunka

- (Ακολουθιακή) υλοποίηση σε  $O(m \log n)$ .
  - Κάθε φάση σε χρόνο  $O(m)$  με δύο περάσματα των ακμών.
  - 1<sup>ο</sup> πέρασμα βρίσκει **ελαφρύτερη ακμή** κάθε συνιστώσας.
    - Διαδοχικά **find**, σημειώνονται ακμές στην ίδια συνιστώσα.
  - 2<sup>ο</sup> πέρασμα **εντάσσει** ελαφρύτερες **ακμές** στο ΕΣΔ και **ενημερώνει** συνιστώσες με αντίστοιχα **union**.
  - Σε κάθε φάση,  $\#$ συνιστώσων **μειώνεται στο μισό**.
    - $\#$ φάσεων =  $O(\log n)$ .
- Πολλοί **σύγχρονοι αλγόριθμοι** (σχεδόν) γραμμικού χρόνου βασίζονται σε **ιδέα Borunka**.

## Συζήτηση – Ασκήσεις

- Έστω γράφημα  $G$  με διαφορετικά βάρη στις ακμές.
  - Νδο κάθε ΕΣΔ του  $G$  περιέχει την ακμή ελάχιστου βάρους.
  - Νδο  $G$  έχει μοναδικό ΕΣΔ.
  - Αληθεύει ότι η μέγιστου βάρους δεν ανήκει στο ΕΣΔ;
- Έστω γράφημα  $G$  με κύκλο  $C$ .
  - Νδο η ακμή μέγιστου βάρους του  $C$  δεν ανήκει σε κανένα ΕΣΔ του  $G$  (εφόσον το βάρος της είναι μεγαλύτερο από αυτών των υπολοίπων).
- Έστω  $T$  ΕΣΔ για γράφημα  $G(V, E, w)$ .
  - Να δείξετε ότι  $T$  παραμένει ΕΣΔ για  $G(V, E, w/2)$ .
  - Αληθεύει ότι το  $T$  παραμένει ΕΣΔ για  $G(V, E, w+k)$ ;

## Συζήτηση – Ασκήσεις

- Υπολογισμός ΕΣΔ  $T$  υπό περιορισμούς ότι κάποιες ακμές πρέπει να (μην) ανήκουν στο  $T$ ;
- Υπολογισμός ΣΔ  $T$  με δεύτερο μικρότερο βάρος;
- Bottleneck κόστος ΣΔ  $T$ :  $b(T) = \max_{e \in T} \{w(e)\}$ 
  - Υπολογισμός ΣΔ με ελάχιστο bottleneck κόστος;