Συντομότερες Διαδρομές

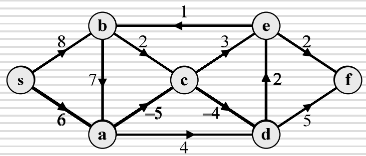
Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

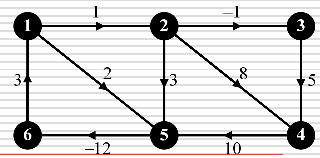
Συντομότερη Διαδρομή

- Κατευθυνόμενο G(V, E, w) με μήκη $w : E \mapsto \mathbb{R}$
  - Μήκος διαδρομής $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k) : w(p) = \sum_{i=0}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$
  - Απόσταση d(u, v): μήκος συντομότερης u – v διαδρομής.
  - Αν δεν υπάρχει u – v διαδρομή, d(u, v) = ∞.
- Ζητούμενο: αποστάσεις και συντομότερες διαδρομές από **αρχική κορυφή** s προς όλες τις κορυφές.
  - Θεμελιώδες πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.



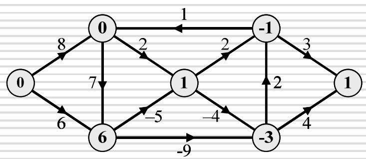
Κύκλοι Αρνητικού Μήκους

- Διαδρομή: ακολ. κορυφών όπου διαδοχικές συνδέονται με ακμή.
- Μονοκονδυλιά: διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές.
- (Απλό) μονοπάτι: διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές.
  - Υπάρχει διαδρομή u – v ανν υπάρχει μονοπάτι u – v.
- Συντομότερη διαδρομή είναι **μονοπάτι** εκτός αν…
  - Υπάρχει κύκλος αρνητικού μήκους!
  - Αποστάσεις δεν ορίζονται γιατί συνολικό μήκος διαδρομής μπορεί να μειώνεται επ' άπειρο!
  - Κύκλος αρνητικού μήκους σε κάποια u – v διαδρομή ⇒ d(u, v) = −∞.



Συντομότερα Μονοπάτια

- Αν p = (v_0, v_1, …, v_k) είναι συντομότερο μονοπάτι, κάθε v_i – v_j τμήμα του αποτελεί συντομότερο v_i – v_j μονοπάτι.
  - Αρχή **βελτιστότητας**.
- Συντομότερα μονοπάτια από s προς όλες τις κορυφές: Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών (SPT, ΔΣΜ).
  - Αν συντομότερα s – v_1 και s – v_2 μονοπάτια έχουν κοινή κορυφή u, χρησιμοποιούν (ίδιο) συντομότερο s – u μονοπάτι.
  - ΔΣΜ αναπαρίσταται με **πίνακα προγόνων.**
  - Ταυτίζεται ΔΣΜ με ΕΣΔ;

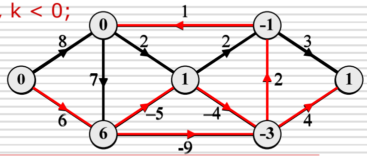


Αποστάσεις

- Αποστάσεις ικανοποιούν την «τριγωνική ανισότητα»:

$$\forall (u, v) \in E,\ d(s,u) \le d(s,v) + w(v,u)$$
$$\forall u, v \in V,\quad d(s,u) \le d(s,v) + d(v,u)$$

  - Ισότητα ισχύει ανν συντ. s – u μονοπάτι περιέχει ακμή (v, u) (αντίστοιχα, διέρχεται από κορυφή v).
- Έστω συντομότερα μονοπάτια από s σε G(V, E, w).
  - Τι συμβαίνει σε G(V, E, kw), k > 0;
  - Τι συμβαίνει σε G(V, E, kw), k < 0;
  - Τι συμβαίνει σε G(V, E, w+k), k > 0;



Υπολογισμός Συντομότερων Μονοπατιών

- Διατηρούμε «απαισιόδοξη» εκτίμηση D[u] για d(s, u).
  - Αρχικά: $D[s] = 0$ και $D[u] = \infty \quad \forall u \in V \setminus \{s\}$

    $p[u] = \text{NULL} \quad \forall u \in V$
  - Αλγόριθμος εξετάζει ακμές (v, u) και αναπροσαρμόζει D[u].

    Αν $D[u] > D[v] + w(v,u)$, τότε $D[u] \leftarrow D[v] + w(v,u)$

    $p[u] \leftarrow v$
- D[u] = μήκος συντομότερου γνωστού s – u μονοπατιού.
  - Επαγωγικά: αν ισχύει πριν τελευταία εξέταση ακμής (v, u), ισχύει και μετά αφού $D[u] \leftarrow \min\{D[u], D[v] + w(v,u)\}$
  - Πάντα $D[u] \ge d(s,u)$, και $D[u] = \infty$ αν $\nexists\, s - u$ μονοπάτι.
  - Όταν ακμές συντομότερου s – v μονοπατ. εξεταστούν με τη σειρά, γίνεται D[u] = d(s, u) και δεν μειώνεται στο μέλλον.
- Συστηματική εξέταση ακμών και κριτήριο τερματισμού.

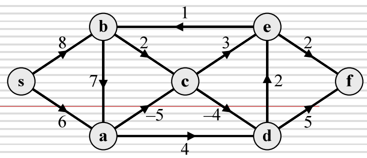
Αλγόριθμος Bellman-Ford

- Ιδέα: δοκιμή όλων των ακμών σε κάθε πιθανή θέση για συντομότερο s – u μονοπάτι (ταυτόχρονα για όλες τις u).
  - D(u, i) = μήκος συντομότερου s – u μονοπ. με ≤ i ακμές.
  - Αρχικά D(s, 0) = 0 και D(u, 0) = ∞ για κάθε u ≠ s.
  - Από ΣΜ με ≤ i ακμές σε ΣΜ με ≤ i+1 ακμές:

$$D(u, i+1) = \min\{D(u,i),\ \min_{v:(v,u)\in E}\{D(v,i) + w(v,u)\}\}$$

  - (Απλό) μονοπάτι έχει ≤ n – 1 ακμές ⇒ D(u, n–1) = d(s, u)

    D(u, n) < D(u, n–1) ανν κύκλος αρνητικού μήκους.
  - Υπολογισμός τιμών D(u, i), u ∈ V, i = 1, …, n, με **δυναμικό προγραμματισμό**.

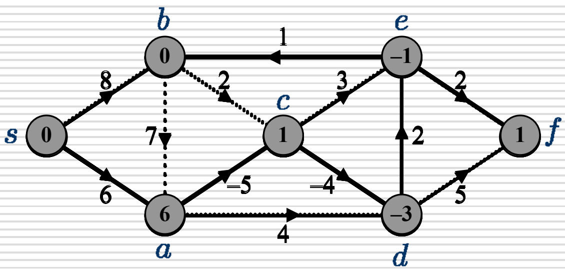


Αλγ. Bellman-Ford: Υλοποίηση

- «Απαισιόδοξη» εκτίμηση D[u].
  - Τέλος κάθε φάσης i, D[u] ≤ D[u, i]
- Σε φάση i = 1, …, n–1, κάθε ακμή εξετάζεται μία φορά.
- Επιπλέον φάση για έλεγχο ύπαρξης κύκλου αρνητικού μήκος.
- Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(nm)$.

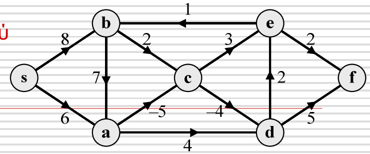
```
Bellman-Ford(G(V, E, w), s)
  for all u ∈ V do
    D[u] ← ∞; p[u] ← NULL;
  D[s] ← 0;
  for i ← 1 to n − 1 do
    for all (v, u) ∈ E do
      if D[u] > D[v] + w(v, u) then
        D[u] ← D[v] + w(v, u);
        p[u] ← v;
  for all (v, u) ∈ E do
    if D[u] > D[v] + w(v, u) then
      return(NEG-CYCLE);
```

Αλγ. Bellman-Ford: Παράδειγμα



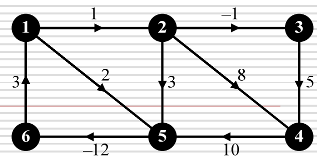
Αλγ. Bellman-Ford: Ορθότητα

- Αν όχι κύκλος αρνητικού μήκους, D[u] = d(s, u) στο τέλος.
  - Συντομότερο s – u μονοπάτι s = v_0, v_1, …, v_k = u με k ακμές.
  - Επαγωγική υπόθ.: Τέλος φάσης i−1, D[v_{i-1}] = d(s, v_{i-1}).
  - Τέλος φάσης i: εξέταση ακμής (v_{i-1}, v_i) και D[v_i] = d(s, v_i):
    $$d(s, v_i) \le D[v_i] \le D[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$$
    $$= d(s, v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i) = d(s, v_i)$$
  - Τέλος φάσης n – 1: D[u] = d(s, u) για κάθε κορυφή u.
  - D[u] δεν μειώνεται άλλο, αφού πάντα D[u] ≥ d(s, u).
  - Αλγόριθμος δεν επιστρέφει ένδειξη για κύκλο αρνητικού μήκους.



Αλγ. Bellman-Ford: Ορθότητα

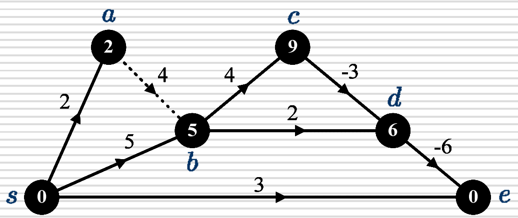
- Αν κύκλος αρνητικού μήκους, ένδειξη στο τέλος.
  - Έστω κύκλος αρνητικού μήκους v_0, v_1, …, v_k = v_0 προσπελάσιμος από s.
  - Εκτιμήσεις D[v_i] πεπερασμένες στο τέλος φάσης n−1.
  - Αν όχι ένδειξη, πρέπει στη φάση n για κάθε v_i στον κύκλο: $D[v_i] \le D[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$
  - Αθροίζοντας κατά μέλη:
    $$\sum_{i=1}^{k} D[v_i] \le \sum_{i=1}^{k} D[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \ge 0$$
  - Άτοπο! Άρα ο αλγόριθμος επιστρέφει ένδειξη για κύκλο αρνητικού μήκους.



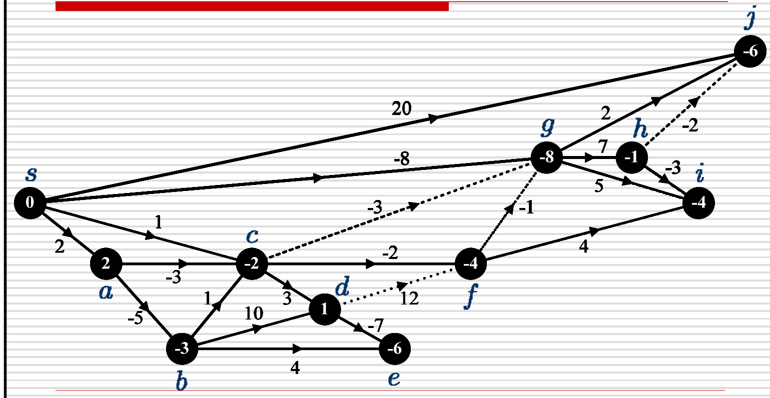
Συντομότερα Μονοπάτια σε DAG

- Σε DAG, σειρά εμφάνισης κορυφών σε κάθε μονοπάτι (άρα και ΔΣΜ) ακολουθεί τοπολογική διάταξη!
  - Έστω τοπολογική διάταξη s = v_1, v_2, …, v_n .
  - d(s, v_k) εξαρτάται μόνο από d(s, v_j) με j < k : $d(s, v_k) = \min_{v_j : (v_j, v_k) \in E} \{d(s, v_j) + w(v_j, v_k)\}$
- Κορυφές εντάσσονται στο ΔΣΜ με σειρά τοπολογ. διάταξης και εξετάζονται εξερχόμενες ακμές τους (μια φορά κάθε ακμή!).
  - Ορθότητα με επαγωγή (παρόμοια με Bellman-Ford).
  - Επαγωγική υπόθ.: ακριβώς πριν την ένταξη του v_k στο ΔΣΜ, ισχύει ότι D[v_j]=d(s,v_j) για κάθε j = 0, …, k.
  - Ακριβώς πριν ένταξη v_{k+1} στο ΔΣΜ, D[v_{k+1}]=d(s,v_{k+1}) αφού
    $$D[v_{k+1}] = \min_{v_j : (v_j, v_{k+1}) \in E} \{D[v_j] + w(v_j, v_{k+1})\}$$

Παράδειγμα



Παράδειγμα



Συντομότερα Μονοπάτια σε DAG

- Χρόνος εκτέλεσης: γραμμικός, Θ(n+m)
- Χρησιμοποιείται και για υπολογισμό μακρύτερων μονοπατιών.
  - Αν G(V, E, w) **ακυκλικό**, p μακρύτερο s – u μονοπάτι ανν p συντομότερη s – u διαδρομή στο G(V, E, –w).

ShortestPath-DAG$(G(V, E, w), s)$
  Έστω τοπολογική διάταξη $s = v_1, v_2, \ldots, v_n$;
  for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $D[v_j] \leftarrow \infty$; $p[v_j] \leftarrow$ NULL;
  $D[v_1] \leftarrow 0$;
  for $j \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**
    for all $(v_j, v_i) \in E$ **do**
      if $D[v_i] > D[v_j] + w(v_j, v_i)$ **then**
        $D[v_i] \leftarrow D[v_j] + w(v_j, v_i)$;
        $p[v_i] \leftarrow v_j$;

Αλγόριθμος Dijkstra

- Ταχύτερα αν όχι αρνητικά μήκη! Αποτελεί γενίκευση BFS.
  - Ταχύτερα αν υπάρχει πληροφορία για σειρά εμφάνισης κορυφών σε συντομότερα μονοπάτια (και ΔΣΜ).
  - Μη αρνητικά μήκη: κορυφές σε αύξουσα σειρά απόστασης.
- Κορυφές εντάσσονται σε ΔΣΜ σε αύξουσα απόσταση και εξετάζονται εξερχόμενες ακμές τους (μια φορά κάθε ακμή!).
  - Αρχικά D[s] = 0 και D[u] = ∞ για κάθε u ≠ s.
  - Κορυφή u εκτός ΔΣΜ με ελάχιστο D[u] εντάσσεται σε ΔΣΜ.
  - Για κάθε ακμή (u, v), $D[v] \leftarrow \min\{D[v], D[u] + w(u, v)\}$
- Ορθότητα: όταν u εντάσσεται σε ΔΣΜ, D[u] = d(s, u).
  - Μη αρνητικά μήκη: κορυφές v με μεγαλύτερο D[v] σε μεγαλύτερη απόσταση και δεν επηρεάζουν D[u].

Αλγόριθμος Dijkstra

- Άπληστος αλγόριθμος.
- **Υλοποίηση**:
  - Ελάχιστο D[v]: ουρά προτεραιότητας.
  - Binary heap: $\Theta(m \log n)$
  - Fibonacci heap: $\Theta(m + n \log n)$
  - Ελάχιστο D[v] γραμμικά: $\Theta(n^2)$.

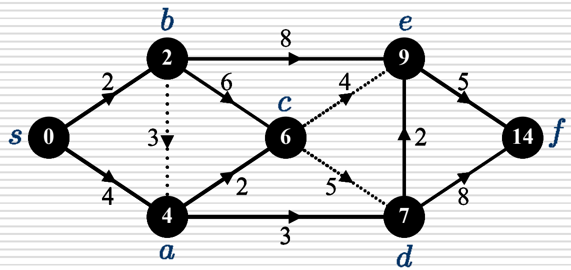
Dijkstra$(G(V,E,w),s)$
  for all $u \in V$ **do**
    $D[u] \leftarrow \infty;\ p[u] \leftarrow \text{NULL};$
  $D[s] \leftarrow 0;\ S \leftarrow \emptyset;$
  while $|S| < |V|$ **do**
    $u \notin S : D[u] = \min_{v \notin S}\{D[v]\};$
    $S \leftarrow S \cup \{u\};$
    for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**
      if $D[v] > D[u] + w(u,v)$ **then**
        $D[v] \leftarrow D[u] + w(u,v);$
        $p[v] \leftarrow u;$

Κάτι μου Θυμίζει ...;!

Dijkstra$(G(V,E,w),s)$
  for all $u \in V$ **do**
    $D[u] \leftarrow \infty;\ p[u] \leftarrow \text{NULL};$
  $D[s] \leftarrow 0;\ S \leftarrow \emptyset;$
  while $|S| < |V|$ **do**
    $u \notin S : D[u] = \min_{v \notin S}\{D[v]\};$
    $S \leftarrow S \cup \{u\};$
    for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**
      if $D[v] > D[u] + w(u,v)$ **then**
        $D[v] \leftarrow D[u] + w(u,v);$
        $p[v] \leftarrow u;$

MST-Prim$(G(V,E,w),s)$
  for all $u \in V$ **do**
    $c[u] \leftarrow \infty;\ p[u] \leftarrow \text{NULL};$
  $c[s] \leftarrow 0;\ S \leftarrow \emptyset;\ \Delta \leftarrow \emptyset;$
  while $|S| < |V|$ **do**
    $u \notin S : c[u] = \min_{v \notin S}\{c[v]\};$
    $S \leftarrow S \cup \{u\};$
    for all $v \in \text{AdjList}[u]$ **do**
      if $v \notin S$ **and** $w(u,v) < c[v]$ **then**
        $c[v] \leftarrow w(u,v);$
        $p[v] \leftarrow u;$
    if $p[u] \neq \text{NULL}$ **then**
      $\Delta \leftarrow \Delta \cup \{u, p[u]\};$

Αλγόριθμος Dijkstra: Παράδειγμα



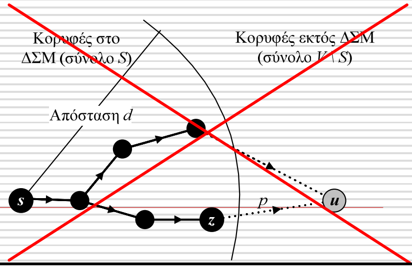
Αλγόριθμος Dijkstra: Ορθότητα

- Θ.δ.ο όταν κορυφή u εντάσσεται σε ΔΣΜ, D[u] = d(s, u).
  - Επαγωγή: έστω D[v] = d(s, v) για κάθε v ήδη στο ΔΣΜ.
  - u έχει ελάχιστο D[u] (εκτός ΔΣΜ). Έστω ότι D[u] > d(s, u).
  - p συντομότερο s – u μονοπάτι με μήκος d(s, u) < D[u], και z τελευταία κορυφή πριν u στο p:

Μπορεί z στο ΔΣΜ;

$$d(s,u) = d(s,z) + w(z,u) < D[u]$$
$$\Rightarrow z \notin S$$

Όχι!



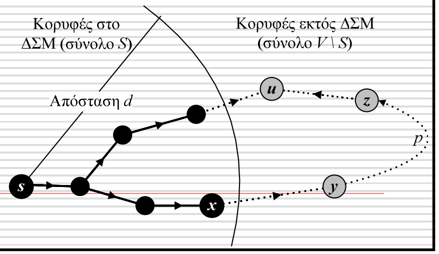
Αλγόριθμος Dijkstra: Ορθότητα

- Θ.δ.ο όταν κορυφή u εντάσσεται σε ΔΣΜ, D[u] = d(s, u).
  - Επαγωγή: έστω D[v] = d(s, v) για κάθε v ήδη στο ΔΣΜ.
  - u έχει ελάχιστο D[u] (εκτός ΔΣΜ). Έστω ότι D[u] > d(s, u).
  - p συντομότερο s – u μονοπάτι με μήκος d(s, u) < D[u], και z τελευταία κορυφή πριν u στο p:

Έστω x (≠ z) τελευταία κορυφή του p στο ΔΣΜ και y (μπορεί y = z) επόμενη της x στο p.

$$D[y] \le D[x] + w(x,y)$$
$$= d(s,x) + w(x,y)$$
$$= d(s,y) < D[u]$$

$\Rightarrow D[y] < D[u]$, **άτοπο!**



Συζήτηση

- Αλγ. Dijkstra ταχύτερος κατά n αλλά δεν εφαρμόζεται για αρνητικά μήκη.
  - Βασίζεται στο ότι αποστάσεις δεν μειώνονται κατά μήκος συντομότερου μονοπατιού.
- Αλγ. Bellman-Ford εφαρμόζεται για αρνητικά μήκη.
  - Αποστάσεις μπορεί να μειώνονται κατά μήκος συντομότερου μονοπατιού.
  - «Τελευταία» κορυφή μπορεί σε μικρότερη απόσταση από αρχική.

Ερωτήσεις – Ασκήσεις

- Αρνητικά μήκη → προσθέτουμε μεγάλο αριθμό → → θετικά μήκη → αλγόριθμος Dijkstra;
- Νδο BFS υπολογίζει ΔΣΜ όταν ακμές μοναδιαίου μήκους.
- **Bottleneck** Shortest Paths:
  - Κόστος μονοπατιού p: $c(p) = \max_{e \in p}\{w(e)\}$
  - Υπολογισμός ΔΣΜ για bottleneck κόστος;
  - Τροποποίηση Dijkstra λύνει Bottleneck Shortest Paths (ακόμη και για αρνητικά μήκη):

$$\forall (u,v) \in E\,, D[v] \leftarrow \min\{D[v], \max\{D[u], w(u,v)\}\}$$

Συντομότερα Μονοπάτια για Όλα τα Ζεύγη Κορυφών

- Υπολογισμός απόστασης d(u, v) και συντομότερου u – v μονοπατιού για κάθε ζεύγος (u, v) $\in V \times V$.
- Αλγόριθμος για ΣΜ από μία κορυφή για κάθε s $\in$ V.
  - Αρνητικά μήκη: Bellman-Ford σε χρόνο $\Theta(n^2 m)$.
  - Μη-αρνητικά μήκη: Dijkstra σε χρόνο $\Theta(n\,m + n^2 \log n)$.
- Αρνητικά μήκη: Floyd-Warshall σε χρόνο $\Theta(n^3)$.
- Αναπαράσταση λύσης:
  - Αποστάσεις: πίνακας D[1..n][1..n]
  - Συντομότερα μονοπάτια: n ΔΣΜ, ένα για κάθε αρχική κορυφή.
    - Πίνακας P[1..n][1..n]: n πίνακες προγόνων.
    - Γραμμή P[i]: πίνακας προγόνων ΔΣΜ(v_i).

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- Θεωρούμε γράφημα G(V, E, w) με μήκη στις ακμές.
  - Καθορισμένη (αυθαίρετη) αρίθμηση κορυφών $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- Αναπαράσταση γραφήματος με πίνακα γειτνίασης:

$$w(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & v_i = v_j \\ w(v_i, v_j) & v_i \neq v_j \ \ (v_i, v_j) \in E \\ \infty & v_i \neq v_j \ \ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

- Υπολογισμός απόστασης $d(v_i, v_j)$ από $d(v_i, v_k)$, $d(v_k, v_j)$ για όλα τα $k \in V \setminus \{v_i, v_j\}$:

$$d(v_i, v_j) = \min\{w(v_i, v_j), \min_{v_k \in V \setminus \{v_i, v_j\}} \{d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)\}\}$$

  - Φαύλος κύκλος(;): $d(v_i, v_k) \to d(v_i, v_j)$ και $d(v_i, v_j) \to d(v_i, v_k)$
  - **Δυναμικός προγραμματισμός**: υπολογισμός όλων με συστηματικό bottom-up τρόπο!

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- $D_k[v_i, v_j]$: μήκος συντομότερου $v_i - v_j$ μονοπατιού με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από $V_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$
  - Αρχικά $D_0[v_i, v_j] = w(v_i, v_j)$ γιατί $V_0 = \emptyset$.
  - Έστω ότι γνωρίζουμε $D_{k-1}[v_i, v_j]$ για όλα τα ζεύγη v_i, v_j.
  - $D_k[v_i, v_j]$ διέρχεται από v_k καμία ή μία φορά (μονοπάτι!):

$$D_k[v_i, v_j] = \min\{D_{k-1}[v_i, v_j], D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j]\}$$

  - Αναδρομική σχέση για $D_0, D_1, \ldots, D_n$:

$$D_k[v_i, v_j] = \begin{cases} w(v_i, v_j) & k = 0 \\ \min\{D_{k-1}[v_i, v_j], D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j]\} & k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

  - Υπολογισμός D_n με **δυναμικό προγραμματισμό**.
  - Κύκλος αρνητικού μήκους αν $D_n[v_i, v_i] < 0$.

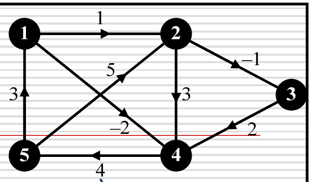
Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- Τυπικός δυναμικός προγραμματισμός:

Χρόνος: **Θ(n³)**

$$
\begin{array}{l}
\textbf{Floyd-Warshall}(G(V,E,w)) \\
\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad \textbf{for } j \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad \textbf{if } (v_i, v_j) \in E \textbf{ then } D_0[i,j] \leftarrow w(v_i, v_j); \\
\quad\quad\quad \textbf{else } D_0[i,j] \leftarrow \infty; \\
\quad\quad D_0[i,i] \leftarrow 0; \\
\quad \textbf{for } k \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad \textbf{for } j \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad\quad \textbf{if } D_{k-1}[i,j] > D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j] \textbf{ then} \\
\quad\quad\quad\quad\quad D_k[i,j] \leftarrow D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]; \\
\quad\quad\quad\quad \textbf{else } D_k[i,j] \leftarrow D_{k-1}[i,j];
\end{array}
$$

Παράδειγμα



$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 5 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ \infty & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 8 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 9 & 10 & 0 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

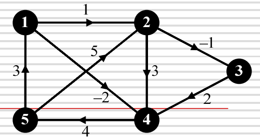
Υπολογισμός Συντομότερων Μονοπατιών

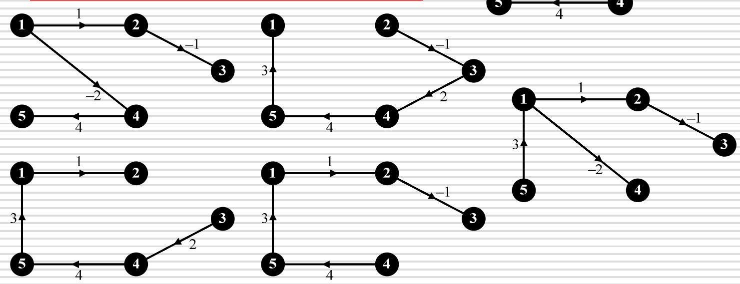
- $P_k[v_i, \cdot\,]$: ΔΣΜ(v_i) με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από V_k .
  - Αποστάσεις $D_k[v_i, \cdot\,]$ αντιστοιχούν σε μονοπάτια $P_k[v_i, \cdot\,]$.
  - $P_k[v_i, v_j]$: προηγούμενη κορυφή της v_j στο συντομότερο $v_i - v_j$ μονοπάτι με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από V_k .
- P_0 καθορίζεται από πίνακα γειτνίασης: $P_0[v_i, v_j] = \begin{cases} \text{NULL} & \text{αν } i = j \text{ ή } (v_i, v_j) \notin E \\ v_i & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
- Αναδρομική σχέση για $P_0, P_1, \ldots, P_n$:

$$P_k[v_i, v_j] = \begin{cases} P_{k-1}[v_i, v_j] & D_{k-1}[v_i, v_j] \leq D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j] \\ P_{k-1}[v_k, v_j] & D_{k-1}[v_i, v_j] > D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j] \end{cases}$$

  - Υπολογισμός P_n ταυτόχρονα με υπολογισμό D_n .
  - Εύκολη τροποποίηση προηγούμενης υλοποίησης.

Παράδειγμα





$$P_5 = \begin{pmatrix} \text{NULL} & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & \text{NULL} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & \text{NULL} & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & \text{NULL} & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & \text{NULL} \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος Johnson

- Συντομότερα μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών σε αραιά γραφήματα με αρνητικά μήκη:
  - **Μετατροπή** αρνητικών μηκών σε **μη αρνητικά** χωρίς να αλλάξουν τα συντομότερα μονοπάτια.
- Αλγόριθμος για γράφημα G(V, E, w):
  - Νέα κορυφή s που συνδέεται με κάθε $v \in V$ με ακμή μηδενικού μήκους: $G'(V \cup \{s\}, E \cup \{(s, v)\}, w)$.
  - Bellman-Ford για G′ με αρχική κορυφή s. Έστω h(v) απόσταση κορυφής $v \in V$ από s.
  - Αν όχι κύκλος αρνητικού μήκους, υπολόγισε νέα (μη αρνητικά) μήκη: $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v), \forall (u, v) \in E$
  - Για κάθε $v \in V$, Dijkstra σε $G(V, E, \hat{w})$ με αρχική κορυφή v.

Αλγόριθμος Johnson

- Χρονική πολυπλοκότητα:
  - Bellman-Ford και n φορές Dijkstra: $\Theta(n\,m + n^2 \log n)$.
- Ορθότητα:
  - Νέα μήκη μη αρνητικά: h(·) αποστάσεις από s, και ισχύει ότι

$$\forall (u, v) \in E, h(v) \leq h(u) + w(u, v) \Rightarrow \hat{w}(u, v) \geq 0$$

  - Μεταβολή στα μήκη δεν επηρεάζει συντομότερα μονοπάτια.
  - Μήκος **κάθε** α – β μονοπατιού μεταβάλλεται κατά h(β) – h(α).
  - Έστω $p \equiv (\alpha = v_0, v_1, \ldots, v_k = \beta)$ οποιοδήποτε α – β μονοπάτι.

$$\hat{\ell}(p) = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{w}(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} [w(v_i, v_{i+1}) + h(v_i) - h(v_{i+1})]$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) + h(v_0) - h(v_k) = \ell(p) + h(\alpha) - h(\beta)$$

Σύνοψη

- Συντομότερα μονοπάτια από μία αρχική κορυφή s:
  - Αρνητικά μήκη: Bellman-Ford σε χρόνο $\Theta(n\, m)$.
    - Δυναμικός προγραμματισμός.
  - DAGs με αρνητικά μήκη σε χρόνο $\Theta(m + n)$.
  - Μη-αρνητικά μήκη: Dijkstra σε χρόνο $\Theta(m + n \log n)$.
    - Απληστία.
- Συντομότερα μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών:
  - Αρνητικά μήκη: Floyd-Warshall σε χρόνο $\Theta(n^3)$.
    - Δυναμικός προγραμματισμός.
  - (Μη-)αρνητικά μήκη και αραιά γραφήματα, $m = o(n^2)$:
    - n φορές Dijkstra σε χρόνο $\Theta(n\, m + n^2 \log n)$.
    - Αν αρνητικά μήκη, αλγ. Johnson για μετατροπή σε θετικά!