Μέγιστη Ροή – Ελάχιστη Τομή

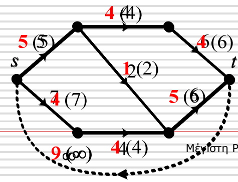
Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δίκτυα και Ροές

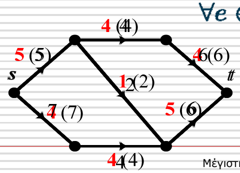
- **Δίκτυο** : κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.
  - Πηγή s, προορισμός t, χωρητικότητα ακμής b_e.
- s – t ροή μεγέθους d : $f : E \mapsto \mathbb{R}_+$:
  - Χωρητικότητα: $\forall e \in E \;\; f_e \leq b_e$
  - Διατήρηση ροής: $\forall v \in V \quad \sum_{e \in in(v)} f_e = \sum_{e \in out(v)} f_e$
  - Μέγεθος: $f_{ts} = d$



Μέγιστη s – t Ροή

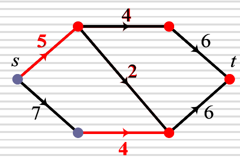
- Πρόβλημα Μέγιστης s – t Ροής (Max-Flow):
  - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
  - Υπολόγισε s – t ροή με μέγιστη τιμή.

$$
\begin{array}{lll}
\max & f_{ts} & \\
\text{s.t.} & f_e \leq b_e & \forall e \in E \\
& \sum_{e \in in(v)} f_e - \sum_{e \in out(v)} f_e \leq 0 & \forall v \in V \\
& f_e \geq 0 & \forall e \in E
\end{array}
$$



s – t Τομή

- s – t τομή χωρητικότητας d :
  - Διαμέριση $(S, V \setminus S)$ με $s \in S$ και $t \in V \setminus S$.
  - Χωρητικότητα $b(S, V \setminus S) = \sum_{(u,v): u \in S, v \notin S} b_{uv} = d$
  - Ακμές χωρητικότητας d που χωρίζουν s από t.



Ελάχιστη s–t Τομή

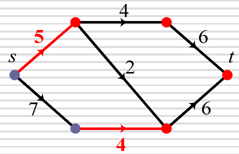
- Πρόβλημα Ελάχιστης s – t Τομής (Min s–t Cut):
  - Δεδομένου δικτύου $G(V, E, s, t, b)$
  - Υπολόγισε s – t τομή με ελάχιστη χωρητικότητα.

$$\min \sum_{(u,v)\in E} d_{uv} b_{uv}$$

$$\text{s.t.} \quad d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 \qquad \forall (u,v) \in E$$

$$p_s - p_t \geq 1$$

$$d_{uv}, p_v \geq 0$$



Ροές και Τομές

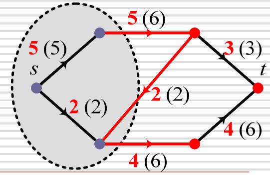
- Έστω ροή f και τομή $(S, V \setminus S)$.

$$f(S, V \setminus S) = \sum_{v\in S, u\notin S} f_{vu} - \sum_{v\in S, u\notin S} f_{uv}$$

- Κάθε s – t ροή f και s – t τομή $(S, V \setminus S)$:

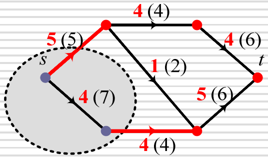
$$f_{ts} = f(S, V \setminus S) \leq b(S, V \setminus S)$$

- **Μέγιστη s – t ροή**
  ≤ ελάχιστη s – t τομή.



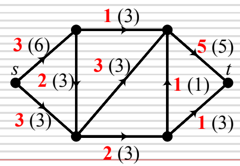
Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή

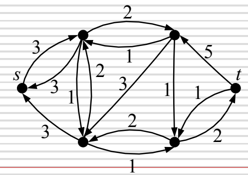
- **Μέγιστη s – t ροή = Ελάχιστη s – t τομή !**
  - Max-Flow – Min-Cut Θεώρημα.
  - Ακμές ελάχιστης τομής κορεσμένες σε μέγιστη ροή.
- Μέγιστη ροή, ελάχιστη τομή: συνεκτικότητα / μεταφορική ικανότητα δικτύου.



Υπολειμματικό Δίκτυο

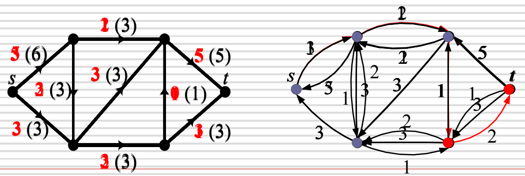
- Δίκτυο $G(V, E, b)$ και ροή f.
- Υπολειμματικό δίκτυο $G_f(V, E_f, r_f)$:
  - Χωρητικότητα (μπρος-ακμές): $\forall (u,v) \in E \;\; r_{uv} = b_{uv} - f_{uv}$
  - Ροή (πίσω-ακμές): $\forall (u,v) \in E \;\; r_{vu} = f_{uv}$
- s – t μονοπάτι στο υπολειμματικό: επαυξητικό μονοπάτι.





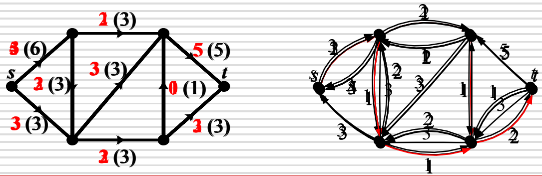
Χαρακτηρισμός Μέγιστης Ροής

- Μέγιστη ροή ανν όχι επαυξητικό μονοπάτι.
- Επαυξητικό μονοπάτι ⇒ αύξηση ροής ⇒ όχι μέγιστη ροή.
- Όχι επαυξητικό μονοπάτι :
  - Κορυφές προσπελάσιμες από *s* ορίζουν τομή χωρητικότητας ίσης με ροή.
  - Μέγιστη ροή και ελάχιστη τομή λόγω Θ. Max-Flow-Min-Cut!



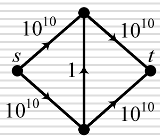
Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- Ενόσω επαυξητικό μονοπ. *p* στο υπολειμματικό,
  - Χωρητικότητα επαυξητικού $\delta \leftarrow \min_{e \in p}\{r_e\}$
  - Αύξηση ροής κατά *δ* στο *p* και ενημέρωση υπολειμματικού δικτύου.
- Επαυξητικό μονοπάτι με π.χ. DFS, BFS.
  - Επαύξηση σε χρόνο $O(m)$.



Χρόνος Εκτέλεσης

- Ακέραιες χωρητικότητες ≤ U:
  - Επαύξηση αυξάνει ροή τουλάχιστον κατά 1.
  - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2\, U)$.
- Δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες έχει ακέραιη μέγιστη ροή.
- Μπορεί εκθετικός χρόνος για μεγάλες χωρητικότητες !
- Μπορεί να μην τερματίσει για άρρητες χωρητικότητες.

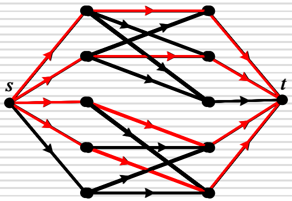


Βελτιώσεις Edmonds-Karp

- Επαυξητικό μονοπάτι με μέγιστη χωρητικότητα.
  - $2m$ επαυξήσεις ⇒ μέγιστη χωρητικότητα στο μισό.
  - Αντί «μέγιστης», «αρκετά μεγάλης» χωρητικότητας:
    - Υπολειμματικό γράφημα μόνο με χωρητικότητες ≥ Δ.
    - Αν όχι επαυξητικό μονοπάτι, Δ ← Δ / 2.
  - Χρόνος εκτέλεσης $O(m^2 \log U)$.
- Επαυξητικό μονοπάτι ελάχιστου μήκους (ακμών).
  - Υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(m)$.
  - #επαυξήσεων $O(n\, m)$, χρόνος εκτέλεσης $O(n\, m^2)$.
  - Βελτίωση Dinic: υπολογισμός με BFS σε χρόνο $O(n)$!
    - Χρόνος εκτέλεσης $O(n^2\, m)$.
- Καλύτεροι αλγόριθμοι με blocking-flow και push-relabel τεχνικές έχουν χρόνους $O(nm\log n)$ και $O(n^3)$ αντιστ.

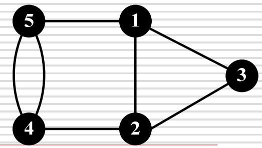
Μέγιστο Ταίριασμα

- Διμερές γράφημα: υπολογισμός μέγιστου αριθμού ακμών χωρίς κοινά άκρα (ταίριασμα).
- Μέγιστη ροή: πηγή *s*, προορισμός *t*, προσανατολισμός $s \rightarrow t$, χωρητικότητα 1.



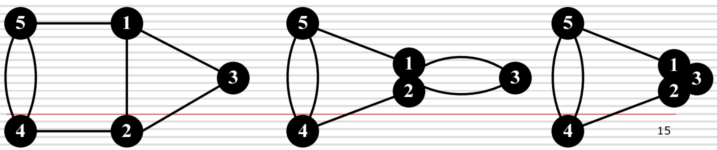
Ελάχιστη Τομή

- Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό πολυγράφημα G(V, E).
  - Πολλαπλές ακμές, όχι χωρητικότητες / βάρη.
- Τομή: διαμέριση κορυφών (S, V \ S) με $\emptyset \neq S \subset V$.
  - Σύνολο ακμών που αφαίρεσή τους δημιουργεί τουλ. 2 συνεκτικές συνιστώσες.
  - Μέγεθος τομής $b(S, V \setminus S) = |\{\{u,v\} \in E : u \in S, v \notin S\}|$
- Πρόβλημα: υπολογισμός μιας ελάχιστης τομής.
  - Λύνεται σε χρόνο $O(n^4)$ με διαδοχικές εφαρμογές αλγόριθμου μέγιστης ροής.
  - Υπάρχουν εξειδικευμένοι αλγόριθμοι με χρόνο $O(n^3)$.



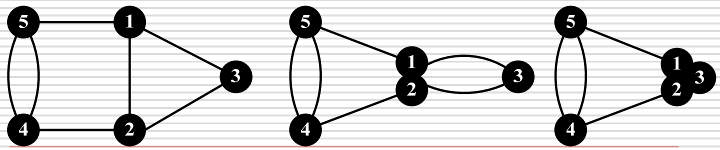
Σύμπτυξη Κορυφών

- **Σύμπτυξη** κορυφών u και v:
  - Αντικατάσταση u, v από μία νέα κορυφή uv.
  - Κάθε ακμή {x, u} / {x, v} αντικαθίσταται από ακμή {x, uv}.
  - Ακμές {u, v} παραλείπονται.
  - Διαδοχικές συμπτύξεις κορυφών 1, 2 και 12, 3.
- Τομή σε γράφημα μετά από διαδοχικές συμπτύξεις αντιστοιχεί σε τομή σε αρχικό γράφημα.
  - Λειτουργία σύμπτυξης **δεν** μειώνει ελάχιστη τομή.



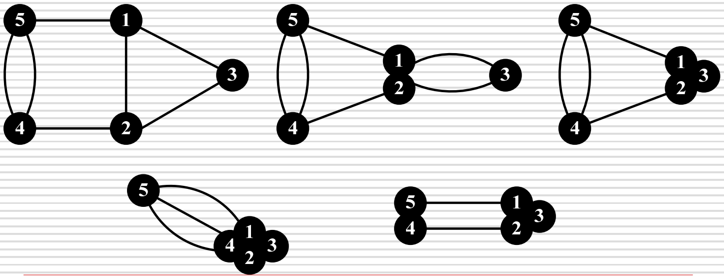
Πιθανοτικός Αλγόριθμος [Karger, 93]

- Ενόσω το γράφημα που απομένει έχει > 2 κορυφές:
  - Διάλεξε μια τυχαία **ακμή** {u, v}.
  - Αντικατέστησε γράφημα με αυτό που προκύπτει από σύμπτυξη κορυφών u και v.
- Ακμές τομής αυτές μεταξύ 2 κορυφών που απομένουν.
- Τομή ορίζεται από κορυφές που συμπτύχθηκαν στις 2 κορυφές που απομένουν.



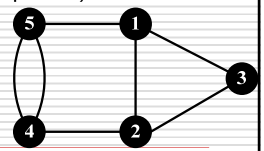
Παράδειγμα

- Αρχικές συμπτύξεις 1, 2, και 12, 3.
  - Σύμπτυξη 123, 4.
  - Σύμπτυξη 5, 4.



Πιθανοτικός Αλγόριθμος [Karger, 93]

- **Monte Carlo** αλγόριθμος:
  - Πάντα τερματίζει έπειτα από $n - 2$ συμπτύξεις.
  - Υπολογίζει μία τομή, μπορεί **όχι** ελάχιστη.
  - Ποιά πιθανότητα p να καταλήξει σε ελάχιστη τομή;
  - Αν p όχι αμελητέα, μεγαλώνει γρήγορα με επαναλήψεις.
  - Π.χ. αν $p \geq 2/n^2$, πιθανότητα τουλ. μία από $n^2 \ln n$ επαναλήψεις να καταλήξει σε ελάχιστη τομή $\geq 1 - 1/n^2$.
- Έστω ελάχιστη τομή $C = \{e_1, \ldots, e_k\}$ μεγέθους k.
  - Αλγ. επιστρέφει C ανν καμία από ακμές C δεν επιλεγεί για σύμπτυξη.



Πιθανότητα Επιτυχίας

- Συγκεκριμένη ελάχιστη τομή $C = \{e_1, \ldots, e_k\}$ μεγέθους k.
  - Πιθανότητα καμία από ακμές C **δεν** επιλέγεται για σύμπτυξη.
  - Ελάχιστος βαθμός κορυφής $\geq$ ελάχιστη τομή.
  - G(V, E) έχει ελάχιστο βαθμό κορυφής $\geq k$.
    - G έχει #ακμών $\geq nk/2$.
    - Πιθανότητα δεν επιλέγεται ακμή C για 1η σύμπτυξη: $$p_1 \geq \frac{\frac{nk}{2} - k}{\frac{nk}{2}} = \frac{n-2}{n}$$
  - Μετά από t συμπτύξεις, γράφημα έχει ελάχιστο βαθμό $\geq k$.
    - #ακμών $\geq (n-t)k/2$.
    - Πιθανότητα δεν επιλέγεται ακμή C για $(t+1)$η σύμπτυξη: $$p_{t+1} \geq \frac{\frac{(n-t)k}{2} - k}{\frac{(n-t)k}{2}} = \frac{n-t-2}{n-t}$$

Πιθανότητα Επιτυχίας

- Συγκεκριμένη ελάχιστη τομή $C = \{e_1, \ldots, e_k\}$ μεγέθους k.
  - Πιθανότητα καμία από ακμές C δεν επιλέγεται για σύμπτυξη:
$$p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n-2} \geq \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$$
- Άρα $p \geq 2/n^2$, και πιθανότητα τουλ. μία από $n^2 \log n$ επαναλήψεις να καταλήξει σε **ελάχιστη τομή** $\geq 1 - 1/n^2$.
  - Χρόνος εκτέλεσης $O(n^2)$ / επανάληψη.
  - Συνολικός χρόνος $O(n^4 \log n)$.

Χρόνος Εκτέλεσης

- Όμως (σχετικά) μικρή πιθανότητα αποτυχίας στις πρώτες μισές συμπτύξεις!
  - Π.χ. πιθανότητα να μην συμπτυχθεί καμία ακμή C στις πρώτες $(n-3)/2$ συμπτύξεις $\geq 1/4$.
  - «Ακριβές» συμπτύξεις είναι «επιτυχημένες».
- Αναδρομική υλοποίηση σε φάσεις:
  - Εκτέλεση βασικού αλγόριθμου για $n/2$ συμπτύξεις 4 φορές.
  - Συνεχίσουμε αναδρομικά για καθένα από τα αποτελέσματα.
- Χρόνος εκτέλεσης $O(n^2 \log^3 n)$ για πιθανότητα επιτυχίας $= 1 - O(1/n)$.