# Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

- Γιατί κάποια (επιλύσιμα) προβλήματα είναι δύσκολο να λυθούν από υπολογιστικές μηχανές.
  - Ποιά επιλύσιμα προβλήματα είναι **εύκολα** και ποιά **δύσκολα**;
- Αντικείμενο: ελάχιστοι υπολογιστικοί πόροι για επιλύσιμα προβλήματα.
  - Εύλογοι υπολογιστικοί πόροι: ευεπίλυτα προβλήματα.
    - Fractional knapsack, minimum spanning tree, shortest paths, max-flow, min-cut, linear programming, …
  - Διαφορετικά, **δισεπίλυτα** προβλήματα.
    - TSP, discrete knapsack, vertex cover, independent set, set cover, scheduling, …
  - Επίδραση υπολογιστικού μοντέλου.



# Προσέγγιση

- Κλάσεις προβλημάτων (complexity classes) με παρόμοια υπολογιστική «δυσκολία» (computational complexity).
- Με (κατάλληλη) **αναγωγή** ορίζουμε «διάταξη» προβλημάτων σε κάθε κλάση (με βάση δυσκολία).
  - Δυσκολότερα προβλήματα: **πλήρη** για την κλάση, συνοψίζουν δυσκολία κλάσης.
  - Πλήρες πρόβλημα «εύκολο»: όλη η κλάση «εύκολη».
  - Αρνητικό αποτέλεσμα: όλα τα πλήρη προβλήματα «δύσκολα».
  - Έτσι (προσπαθούμε να) καθορίσουμε επαρκείς υπολογιστικούς πόρους για επίλυση δύσκολων προβλημάτων.
- Διαλεκτική σχέση αλγόριθμων και πολυπλοκότητας.



# Χρονική Πολυπλοκότητα

- Χρονική πολυπλοκότητα DTM M:
  - Αύξουσα συνάρτηση $t : \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$ ώστε για κάθε x, $|x| = n$, M(x) τερματίζει σε $\leq t(n)$ βήματα.
- Χρονική πολυπλοκότητα προβλήματος Π:
  - Χρονική πολυπλοκότητα «ταχύτερης» DTM που λύνει Π.
- Κλάση $\mathbf{DTIME}[t(n)] \equiv \{\Pi : \Pi \text{ λύνεται σε χρόνο } O(t(n))\}$
- Ιεραρχία κλάσεων χρονικής πολυπλοκότητας:
  $\mathbf{DTIME}[t(n)] \subset \mathbf{DTIME}[\omega(t(n)\log t(n))]$
  $\mathbf{DTIME}[n] \subset \mathbf{DTIME}[n^2] \subset \mathbf{DTIME}[n^3] \subset \cdots$
- Πολυωνυμικός χρόνος: $\mathbf{P} \equiv \bigcup_{k\geq 0} \mathbf{DTIME}[n^k]$
- Εκθετικός χρόνος: $\mathbf{EXP} \equiv \bigcup_{k\geq 0} \mathbf{DTIME}[2^{n^k}]$

$\mathbf{P} \subset \mathbf{EXP}$

# Ευεπίλυτα Προβλήματα

- **Κλάση P** : προβλήματα απόφασης που λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- **Θέση Cook – Karp** : κλάση ευεπίλυτων προβλημάτων ταυτίζεται με κλάση **P**.

Υπέρ θέσης Cook – Karp:

- Συνήθως πολυώνυμα μικρού βαθμού (π.χ. $n$, $n^2$, $n^3$).
- Κλειστότητα κλάσης.
- Διπλασιασμός υπολογιστικής ισχύος: σημαντική αύξηση στο μέγεθος στιγμιότυπων που λύνουμε.

Εναντίον θέσης Cook – Karp:

- Ακραίες περιπτώσεις: πρακτικό το $n^{100}$ αλλά όχι το $(1.001)^n$ !
- Γραμμικός Προγραμματισμός:
  Simplex εκθετικού χρόνου αλλά πολύ γρήγορος στην πράξη.
  Ελλειψοειδές πολυωνυμικού χρόνου αλλά καθόλου πρακτικός!



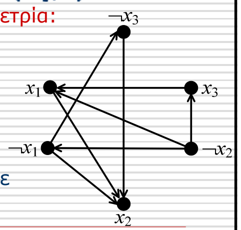
# $k$-Ικανοποιησιμότητα

- Λογική πρόταση φ σε $k$-Συζευκτική Κανονική Μορφή, $k$-CNF:
  $\varphi \equiv c_1 \wedge \ldots \wedge c_m$, όπου $c_i = \ell_{i_1} \vee \ldots \vee \ell_{i_k}$, με $\ell_{i_j} \in \{x_1, \neg x_1, \ldots, x_n, \neg x_n\}$
  - $c_j$: όροι. $\ell_{i_j}$: literals. #literals σε κάθε όρο $\leq k$.
    Π.χ. για $k = 2$: $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$
- $k$-Ικανοποιησιμότητα:
  - Δίνεται φ σε k-CNF. Είναι φ ικανοποιήσιμη;



# 2-Ικανοποιησιμότητα

- 2-Ικανοποιησιμότητα $\in$ **P**.
  - Παρατηρούμε ότι $\ell_i \vee \ell_j \equiv (\neg \ell_i \rightarrow \ell_j) \wedge (\neg \ell_j \rightarrow \ell_i)$
  - Κατασκευάζουμε κατευθυν. γράφημα $G_\varphi$ με «συνεπαγωγές» $\varphi$. $G_\varphi$ έχει κορυφές $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \ldots, \neg x_n\}$
  - Για κάθε όρο $\ell_i \vee \ell_j$, ακμές $G_\varphi$ $(\neg \ell_i, \ell_j)$ και $(\neg \ell_j, \ell_i)$
  - Ακμές και μονοπάτια $G_\varphi$ εμφανίζουν συμμετρία:
    ακμή $(\ell_i, \ell_j) \Leftrightarrow$ ακμή $(\neg \ell_j, \neg \ell_i)$
    $\ell_i - \ell_j$ μονοπάτι $\Leftrightarrow \neg \ell_j - \neg \ell_i$ μονοπάτι
  - Όμως $\ell_i \rightarrow \ell_j$ ψευδής $\Leftrightarrow \ell_i = 1$ και $\ell_j = 0$
  - $\varphi$ μη ικανοποιήσιμη ανν υπάρχουν $x_i - \neg x_i$ και $\neg x_i - x_i$ μονοπάτια.
  - Λόγω αυτών, καμία αποτίμηση $x_i$ και $\neg x_i$ σε συμπληρωματικές τιμές δεν ικανοποιεί $\varphi$.

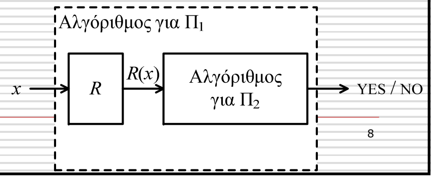



$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge$
$\wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$



# (Πολυωνυμική) Αναγωγή

- $\Pi_1$ ανάγεται **ανάγεται** πολυωνυμικά σε $\Pi_2$ ($\Pi_1 \leq_P \Pi_2$):
  - Υπάρχει πολυωνυμικά υπολογίσιμη συνάρτηση R: $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ ώστε $\forall x \in \Sigma^*$, $x \in \Pi_1 \Leftrightarrow R(x) \in \Pi_2$.
  - R καλείται **πολυωνυμική αναγωγή**.
  - $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ : $\Pi_2$ είναι τουλ. τόσο δύσκολο όσο το $\Pi_1$ (για τον υπολογισμό σε πολυωνυμικό χρόνο).
  - Αν $\Pi_2 \in$ **P**, τότε και $\Pi_1 \in$ **P**.
  - Αν $\Pi_1 \notin$ **P**, τότε και $\Pi_2 \notin$ **P**.
- Παράδειγμα αναγωγής: 2-SAT $\leq_P$ Προσπελασιμότητα.



# Πληρότητα

- Έστω **C** μια κλάση προβλημάτων.
  - Π είναι **C**-δύσκολο (**C**-hard) ως προς αναγωγή R αν κάθε πρόβλημα Π′ στην **C** ανάγεται κατά R στο Π. $\forall \Pi' \in \mathbf{C}, \Pi' \leq_R \Pi$
  - Αν Π ∈ C και Π είναι **C**-δύσκολο ως προς αναγωγή R, τότε Π είναι **C**-πλήρες (**C**-complete) ως προς R. $\forall \Pi' \in \mathbf{C}, \Pi' \leq_R \Pi$ και $\Pi \in \mathbf{C}$
  - Αναγωγή πρέπει να είναι «λίγο ευκολότερη» από «δυσκολότερα» προβλήματα στην κλάση **C**.
- Πλήρη προβλήματα (ως προς κατάλληλη αναγωγή) συνοψίζουν υπολογιστική δυσκολία κλάσης **C**.
- Κλάση **C** κλειστή ως προς αναγωγή R αν
  $$\forall \Pi_1, \Pi_2, \Pi_1 \leq_R \Pi_2 \text{ και } \Pi_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow \Pi_1 \in \mathbf{C}$$



# Ιδιότητες Αναγωγής

- Κλάση **P** είναι κλειστή ως προς πολυωνυμική αναγωγή.
  - Αν $\Pi_2 \in$ **P**, τότε και $\Pi_1 \in$ **P**.
- Πολυωνυμική αναγωγή είναι μεταβατική.
  - Σύνθεση πολυωνυμικών αναγωγών αποτελεί πολυωνυμική αναγωγή.
- Αν $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ και $\Pi_2 \leq_P \Pi_1$, τότε $\Pi_1$ και $\Pi_2$ πολυωνυμικά ισοδύναμα, $\Pi_1 \equiv_P \Pi_2$.
- Κλάσεις κλειστές ως προς αναγωγή R με κοινό πλήρες πρόβλημα ως προς αναγωγή R **ταυτίζονται**.
  - Έστω κλάσεις $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ κλειστές ως προς αναγωγή R.
  - Αν $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ έχουν κοινό πλήρες πρόβλημα Π ως προς αναγωγή R, τότε $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$.



# (Απλά) Παραδείγματα Αναγωγών

- Κύκλος Hamilton $\leq_P$ TSP με αποστάσεις 1 και 2 – TSP(1, 2).
  - Δίνεται γράφημα G(V, E). Έχει G κύκλο Hamilton;
  - Από G, κατασκευάζουμε στιγμιότυπο $I_G$ του TSP(1, 2):
    - Μία «πόλη» u για κάθε κορυφή u ∈ V.
    - Συμμετρικές αποστάσεις: $d(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{u,v\} \in E \\ 2 & \text{αν } \{u,v\} \notin E \end{cases}$
  - G έχει κύκλο Hamilton ανν $I_G$ έχει περιοδεία μήκους ≤ |V|.
- TSP(1, 2) $\leq_P$ Metric TSP.
  - 1ο ειδική περίπτωση 2ου : αποστάσεις 1 και 2 ικανοποιούν τριγωνική ανισότητα.



# (Απλά) Παραδείγματα Αναγωγών

- Min Vertex Cover $\equiv_P$ Max Independent Set $\equiv_P$ Max Clique.
  - Vertex cover C σε γράφημα G(V, E) ανν independent set V \ C σε γράφημα G ανν clique V \ C σε συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$.
- Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E), |V| = $n$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
  - Το G έχει vertex cover ≤ $k$.
  - Το G έχει independent set ≥ $n - k$.
  - Το συμπληρωματικό $\overline{G}$ έχει clique ≥ $n - k$.

# «Δύσκολα» Προβλήματα

- Τι κάνουμε όταν ένα πρόβλημα φαίνεται «δύσκολο»;
  - «Δύσκολο»: μετά από μεγάλη προσπάθεια, δεν βρίσκουμε αποδοτικό αλγόριθμο (πολυωνυμικού χρόνου).
- Πάμε στο αφεντικό και λέμε:
  - Δεν **μπορώ** να βρω αποδοτικό αλγόριθμο. Απόλυση!
  - Δεν **υπάρχει** αποδοτικός αλγόριθμος. Too good to be true!
  - **Κανένας** δεν μπορεί να βρει αποδοτικό αλγόριθμο:
    - Ανάγουμε πολυωνυμικά κάποιο γνωστό **NP**-πλήρες πρόβλημα στο «δικό μας».
- Θεωρία **NP-πληρότητας.**
  - NP-πλήρη: κλάση εξαιρετικά σημαντικών προβλημάτων που ανάγονται πολυωνυμικά το ένα στο άλλο.
  - Είτε όλα λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο είτε κανένα.
  - Έχουν μελετηθεί τόσο πολύ, ώστε όλοι πιστεύουν ότι **κανένα**!