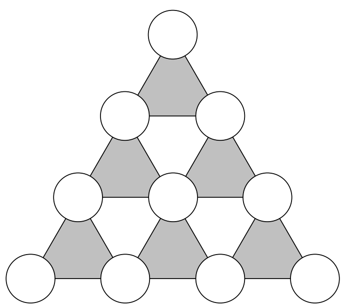
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 25/10/2010

Άσκηση 1: Πρόβλημα Βασιλισσών, Λατινικά και Μαγικά Τετράγωνα.

1. Σε μια σκακιέρα 4×4 τοποθετήστε 4 βασίλισσες που να μην αλληλοαπειλούνται. Πόσες ουσιαστικά διαφορετικές λύσεις υπάρχουν; Να επαναλάβετε για μια σκακιέρα 5×5 με 5 βασίλισσες.
2. Η επιφάνεια που δημιουργείται, αν ταυτίσουμε αφενός την πάνω με την κάτω πλευρά αφετέρου την δεξιά με την αριστερή πλευρά της σκακιέρας λέγεται τόρος. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν 4 βασίλισσες στην τορο-σκακιέρα 4×4 που να μην αλληλοαπειλούνται, και ότι υπάρχει (ουσιαστικά μόνο ένας) τρόπος να τοποθετηθούν 5 βασίλισσες στην τορο-σκακιέρα 5×5 ώστε να μην αλληλοαπειλούνται.
3. Σε ένα πίνακα 5×5 τοποθετήστε τα γράμματα a, b, c, d, e (ένα σε κάθε τετραγωνάκι) έτσι ώστε σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο (και τοροειδώς) να έχουμε διαφορετικά γράμματα.
4. Τοποθετήστε τώρα στον πίνακα 5×5 συνδυασμούς των Λατινικών γραμμάτων a, b, c, d, e και των Ελληνικών γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του προηγούμενου ερωτήματος για τα Λατινικά και τα Ελληνικά, και επιπλέον να μην έχουμε τον ίδιο συνδυασμό δύο φορές (αυτό λέγεται Λατινικό τετράγωνο).
5. Αν θέσουμε $a = \alpha = 0$, $b = \beta = 1$, $c = \gamma = 2$, $d = \delta = 3$, $e = \varepsilon = 4$ και διαβάσουμε το συνδυασμό ψηφίων στο πενταδικό σύστημα (π.χ. $b\delta = 13_5 = 8$), τότε έχουμε ένα μαγικό τόρο (τοροειδές τετράγωνο). Δηλαδή, εμφανίζονται όλοι οι αριθμοί από 0 έως 24 έτσι ώστε τα αθροίσματα σε στήλες, γραμμές και (τοροειδείς) διαγωνίους να είναι ίσα. Ελέγξτε το.
6. Δοκιμάστε να βρείτε αλγοριθμικό κανόνα για την κατασκευή μαγικού τόρου 5×5. Σημειωτέον ότι δεν υπάρχει μαγικό τετράγωνο 2×2, υπάρχει 3×3, 4×4, 6×6, 8×8, 9×9 αλλά δεν υπάρχει μαγικός τόρος. Υπάρχει όμως μαγικός τόρος 5×5, 7×7, 11×11 (και πολλοί 13×13). Τι σχέση υπάρχει μεταξύ των τριών προβλημάτων (όλα σε τόρο): Βασιλισσών, Λατινικών Τετραγώνων, Μαγικών Τετραγώνων;

Άσκηση 2: Γραμμοσκιασμένα Τρίγωνα

Να τοποθετηθούν οι αριθμοί $0, 1, \ldots, 9$ στους κύκλους του διπλανού σχήματος, ώστε τα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα να έχουν το ίδιο άθροισμα.



Άσκηση 3: Γραφηματικές Ακολουθίες

Η *ακολουθία βαθμών* (degree sequence) ενός γραφήματος είναι η λίστα των βαθμών των κορυφών του, συνήθως σε φθίνουσα σειρά. Μια ακολουθία $n \geq 1$ φυσικών αριθμών ονομάζεται *γραφηματική* (graphic sequence) αν αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός *απλού* μη κατευθυνόμενου γραφήματος n κορυφών. Η μοναδική γραφηματική ακολουθία με ένα στοιχείο είναι η $d_1 = 0$.

Να δείξετε ότι μια ακολουθία $n > 1$ φυσικών $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_1 \geq \cdots \geq d_n$, είναι γραφηματική αν και μόνο αν η ακολουθία $\boldsymbol{d}'$ που προκύπτει από την $\boldsymbol{d}$ αν αφαιρέσουμε το μεγαλύτερο στοιχείο d_1 και μειώσουμε τα d_1 επόμενα μεγαλύτερα στοιχεία της $\boldsymbol{d}$ κατά 1 είναι επίσης γραφηματική.

Άσκηση 4: Διαμέριση Κορυφών Επίπεδου Γραφήματος

Έστω G απλό μη κατευθυνόμενο επίπεδο γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές. Να δείξετε ότι οι κορυφές του G μπορούν να διαμεριστούν σε τρία σύνολα ώστε το επαγόμενο υπογράφημα που ορίζεται από τις κορυφές κάθε συνόλου να μην έχει κύκλο.

Άσκηση 5: Ολική Καταβόθρα

Ολική καταβόθρα σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται μια κορυφή που δεν έχει εξερχόμενες ακμές και έχει εισερχόμενη ακμή από κάθε άλλη κορυφή. Θεωρούμε γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές που αναπαρίσταται με πίνακα γειτνίασης:

1. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $\mathrm{O}(n^2)$ που βρίσκει μια ολική καταβόθρα ή αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει.
2. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $\mathrm{O}(n)$ που βρίσκει μια ολική καταβόθρα ή να αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει.

Άσκηση 6: Εξισορρόπηση Δέντρου

Έστω $T(V, E)$ δέντρο με θετικά βάρη $w : V \mapsto \mathbb{N}^*$ στις κορυφές του. Θέλουμε να επιλέξουμε μια κορυφή v του T ως ρίζα, ώστε το συνολικό βάρος των κορυφών στο βαρύτερο υποδέντρο της v να είναι το ελάχιστο δυνατό. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας μια κορυφή v με βαθμό $d(v)$ ως ρίζα του T, διαμερίζουμε τις κορυφές του T στην ρίζα v και στις κορυφές των $d(v)$ υποδέντρων $T_{v_1}, \ldots, T_{v_{d(v)}}$ με ρίζες τους γείτονες $v_1, \ldots, v_{d(v)}$ της v στο T. Το συνολικό βάρος των κορυφών σε κάθε υποδέντρο είναι $w(T_{v_1}), \ldots, w(T_{v_{d(v)}})$. Θεωρούμε ότι η καταλληλότερη ρίζα για το T είναι η κορυφή v που ελαχιστοποιεί την ποσότητα $b(v) = \max_{1 \leq i \leq d(v)} \{w(T_{v_i})\}$, δηλ. το συνολικό βάρος των κορυφών στο βαρύτερο υποδέντρο της v.

Να διατυπώσετε έναν όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμο που δεδομένου ενός δέντρου $T(V, E)$ και του βάρους $w(u)$ κάθε κορυφής $u \in V$, υπολογίζει μια κορυφή v με ελάχιστο $b(v)$.