Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 11/11/2010

Άσκηση 1: Ασυμπτωτική Εκτίμηση

Να ταξινομήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά τάξης μεγέθους. Βρείτε δηλαδή διάταξη $g_1, g_2, g_3, \ldots$ τέτοια ώστε $g_1 = \mathrm{O}(g_2)$, $g_2 = \mathrm{O}(g_3)$, κ.ο.κ.

2^{2^n}	$n!$	$n2^n$	$10n$
$\log(n!)$	$\log^{10} n$	$n^{\log\log n}$	$\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\log n}}$
$\log n^3$	$\frac{n}{\log n}$	$\frac{n^2}{\log^{10} n}$	$\frac{\log n}{n}$
$3n^6$	e^n	$\sqrt{n!}$	$\binom{n}{4}$

Να επισημάνετε ακόμη τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους.

Άσκηση 2: Επίλυση Αναδρομικών Σχέσεων

(α) Να λύσετε την παρακάτω αναδρομική σχέση χωρίς χρήση του Master Theorem. Για απλότητα, να υποθέσετε ότι το n είναι δύναμη του 3.

$$T(n) = 2\,T(n/3) + 29n\,, \quad T(1) = 7$$

(β) Η πολυπλοκότητα τριών αλγορίθμων για το ίδιο πρόβλημα δίνεται από τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

1. $T_1(n) = 5\,T_1(n/5) + n/\log_5 n$, $T_1(1) = \Theta(1)$
2. $T_2(n) = 2\,T_2(n/4) + n^2\sqrt{n}$, $T_2(1) = \Theta(1)$
3. $T_3(n) = T_3(n-1) + 1/n$, $T_3(1) = \Theta(1)$

Να λύσετε τις αναδρομικές σχέσεις και να ταξινομήσετε τους τρεις αλγορίθμους ως προς την αποδοτικότητά τους. Ποιοι από αυτούς χρησιμοποιούν τη μέθοδο "διαίρει-και-βασίλευε" και γιατί;

Άσκηση 3: Βρείτε το Κάλπικο Νόμισμα

Έχουμε 12 νομίσματα, το ένα από τα οποία είναι κάλπικο. Όλα τα γνήσια νομίσματα έχουν το ίδιο ακριβώς βάρος. Το κάλπικο νόμισμα διαφέρει από τα γνήσια μόνο ως προς το βάρος, αλλά δεν γνωρίζουμε αν είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο. Για τον εντοπισμό του κάλπικου νομίσματος, χρησιμοποιούμε μια ζυγαριά ακριβείας που ελέγχει αν ένα σύνολο νομισμάτων είναι ελαφρύτερο, ίδιου βάρους, ή βαρύτερο από ένα άλλο σύνολο νομισμάτων (φυσικά, τα δύο σύνολα πρέπει να είναι ξένα μεταξύ τους), αλλά δεν δίνει καμία άλλη πληροφορία για το βάρος των νομισμάτων. Οι ζυγίσεις μας πρέπει να αφορούν μόνο υποσύνολα των 12 νομισμάτων που έχουμε στη διάθεσή μας (δηλ. δεν μπορεί να συμμετέχουν στις ζυγίσεις νομίσματα εκτός των 12 αρχικών που γνωρίζουμε ότι είναι γνήσια ή κάλπικα).

1. Να δείξετε ότι με 3 ζυγίσεις μπορούμε να ανακαλύψουμε το κάλπικο νόμισμα και αν αυτό είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο από τα γνήσια. Να δείξετε ακόμη ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό με 2 μόνο ζυγίσεις.
2. Αν είχαμε στη διάθεσή μας 2 μόνο ζυγίσεις, ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός νομισμάτων ανάμεσα στα οποία θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε το κάλπικο και αν αυτό είναι ελαφρύτερο ή βαρύτερο από τα γνήσια; Ποιος είναι ο αντίστοιχος αριθμός για $n = 4, 5, \ldots$ ζυγίσεις;

Άσκηση 4: Μέτρηση Αντιστροφών

Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$ μια ακολουθία n διαφορετικών ακεραίων. Ως μέτρο του πόσο απέχει αυτή η ακολουθία από το να είναι ταξινομημένη σε αύξουσα σειρά χρησιμοποιούμε τον *αριθμό των αντιστροφών*. Ο αριθμός των αντιστροφών για την ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι το πλήθος των ζευγαριών στοιχείων a_i, a_j με $i < j$ και $a_i > a_j$, δηλ. το πλήθος των ζευγαριών στοιχείων που βρίσκονται εκτός διάταξης. Για παράδειγμα, ο αριθμός των αντιστροφών για την ακολουθία $6, 5, 4, 3, 2, 1$ είναι 15 (όλα τα ζεύγη είναι εκτός διάταξης), ο αριθμός των αντιστροφών για την ακολουθία $5, 1, 2, 6, 3, 4$ είναι 6 (τα ζεύγη $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, και $(6, 4)$), και ο αριθμός των αντιστροφών για την ταξινομημένη ακολουθία $1, 2, 3, 4, 5, 6$ είναι 0.

Να διατυπώσετε αλγόριθμο "διαίρει-και-βασίλευε" που υπολογίζει τον αριθμό των αντιστροφών μιας ακολουθίας n διαφορετικών ακεραίων σε χρόνο $\mathrm{O}(n \log n)$. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα και την χρονική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου.

Άσκηση 5: Βίδες και Παξιμάδια

Δίνονται ένα κουτί με n βίδες και ένα κουτί με n παξιμάδια. Όλες οι βίδες έχουν διαφορετικό μέγεθος, όλα τα παξιμάδια έχουν διαφορετικό μέγεθος, και κάθε βίδα ταιριάζει με ένα μόνο παξιμάδι. Το ζητούμενο είναι να ταιριάξουμε όλες τις βίδες με τα παξιμάδια τους. Υπάρχει όμως ο περιορισμός ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τα μεγέθη δύο βιδών ούτε μπορούμε να συγκρίνουμε τα μεγέθη δύο παξιμαδιών. Μπορούμε μόνο να συγκρίνουμε τα μεγέθη μιας βίδας και ενός παξιμαδιού, και να προσδιορίσουμε αν η βίδα είναι μεγαλύτερη, μικρότερη, ή ταιριάζει με το παξιμάδι (και βέβαια αντίστοιχα, αν το παξιμάδι είναι μικρότερο, μεγαλύτερο, ή ταιριάζει με τη βίδα).

Δεδομένου του παραπάνω περιορισμού, να διατυπώσετε *πιθανοτικό* αλγόριθμο που ταιριάζει όλες τις βίδες με τα παξιμάδια τους και απαιτεί κατά μέση τιμή $\mathrm{O}(n \log n)$ συγκρίσεις του μεγέθους μιας βίδας με το μέγεθος ενός παξιμαδιού. *Σημείωση:* Ο αλγόριθμός σας πρέπει οπωσδήποτε να χρησιμοποιεί τυχαιότητα, αφού ο ντετερμινιστικός αλγόριθμος αντίστοιχης πολυπλοκότητας είναι σημαντικά δυσκολότερος και χρησιμοποιεί βαθύτερες τεχνικές που η κατανόησή τους υπερβαίνει τους στόχους του μαθήματος.