Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 10/1/2011

Άσκηση 1: Ενημέρωση Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου

Θεωρούμε μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη στις ακμές, και ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $T(V, E')$ του G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* που τροποποιεί κατάλληλα το T ώστε να παραμείνει Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο όταν το βάρος μιας ακμής $e \in E$ αλλάζει από $w(e)$ σε $\hat{w}(e)$. Για την διατύπωση και τον προσδιορισμό του χρόνου εκτέλεσης του αλγορίθμου σας, να υποθέσετε ότι τόσο το G όσο και το T αναπαρίστανται με λίστες γειτνίασης.

Σημείωση: Πρόκειται για την Άσκηση **5.23** του DPV.

Άσκηση 2: Bottleneck Shortest Path Tree

Θεωρούμε ένα απλό *μη κατευθυνόμενο* γράφημα $G(V, E, c)$ με χωρητικότητες $c(e)$ στις ακμές του $e \in E$, και αξιολογούμε τα μονοπάτια μεταξύ δύο κορυφών u, v με βάση την χωρητικότητά τους. Η χωρητικότητα ενός $u - v$ μονοπατιού p καθορίζεται από την ελάχιστη χωρητικότητα των ακμών του, και είναι $C(p) = \min_{e \in p}\{c(e)\}$. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε ένα (όσο το δυνατόν πιο αραιό) συνδετικό υπογράφημα του G που για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, περιέχει ένα $u - v$ μονοπάτι μέγιστης χωρητικότητας.

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει συνδετικό *δέντρο* T του G στο οποίο για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, το μοναδικό $u - v$ μονοπάτι στο T αποτελεί ένα $u - v$ μονοπάτι μέγιστης χωρητικότητας.

(β) Με βάση το (α), να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός τέτοιου συνδετικού δέντρου.

Σημείωση: Πρόκειται για την Άσκηση **4.19** του KT.

Άσκηση 3: Δεύτερο Ελαφρύτερο Συνδετικό Δέντρο

Θεωρούμε μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη στις ακμές, και υποθέτουμε ότι $|E| \geq |V|$ και ότι όλα τα βάρη των ακμών του G είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των συνδετικών δέντρων του G, και έστω $T' \in \mathcal{T}$ ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του G. Το Δεύτερο Ελαφρύτερο Συνδετικό Δέντρο (2ο-ΕΣΔ) του G είναι ένα συνδετικό δέντρο $T \in \mathcal{T}$ τέτοιο ώστε $w(T) = \min_{T'' \in \mathcal{T} \setminus \{T'\}}\{w(T'')\}$. Με άλλα λόγια, το 2ο-ΕΣΔ T είναι ένα συνδετικό δέντρο του G που έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο από το βάρος του ΕΣΔ T' και μικρότερο ή ίσο από το βάρος κάθε άλλου συνδετικού δέντρου.

(α) Να δείξετε ότι το ΕΣΔ του G είναι μοναδικό, και ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει απαραίτητα για το 2ο-ΕΣΔ του G.

(β) Έστω T το ΕΣΔ του G και T' κάποιο 2ο-ΕΣΔ. Να δείξετε ότι τα T και T' διαφέρουν κατά μία μόνο ακμή, δηλ. ότι υπάρχουν ακμές $e \in T$ και $e' \notin T$ τέτοιες ώστε $T' = T \cup \{e'\} \setminus \{e\}$.

(γ) Έστω T ένα συνδετικό δέντρο του G και, για οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών $u, v \in V$, έστω $e_{uv}^{\max}$ η ακμή μέγιστου βάρους στο μοναδικό $u - v$ μονοπάτι στο T. Να διατυπώσετε αλγόριθμο χρόνου $O(|V|^2)$ που δέχεται ως είσοδο το T και προσδιορίζει την ακμή $e_{uv}^{\max}$ για όλα τα ζεύγη κορυφών $u, v \in V$.

(δ) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα 2ο-ΕΣΔ του G.

Σημείωση: Πρόκειται για την Άσκηση **23-1** του CLRS.

Άσκηση 4: Bottleneck Spanning Tree

Ένα Bottleneck Spanning Tree ενός απλού μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές είναι ένα συνδετικό δέντρο του G στο οποίο το μέγιστο βάρος ακμής είναι ελάχιστο μεταξύ όλων των συνδετικών δέντρων του G. Δηλαδή το Bottleneck Spanning Tree T ελαχιστοποιεί το bottleneck κόστος $c(T) = \max_{e \in T}\{w(e)\}$.

(α) Να δείξετε ότι κάθε Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G αποτελεί ένα Bottleneck Spanning Tree. Με βάση το (α), μπορούμε να υπολογίσουμε ένα Bottleneck Spanning Tree του G σε χρόνο όχι μεγαλύτερο από τον χρόνο που χρειάζεται για τον υπολογισμό ενός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι ένα Bottleneck Spanning Tree μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο.

(β) Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* ο οποίος δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα $G(V, E, w)$ και έναν φυσικό B, και αποφασίζει αν το G έχει συνδετικό δέντρο με bottleneck κόστος μικρότερο ή ίσο του B.

(γ) Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* που δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα $G(V, E, w)$, και υπολογίζει ένα Bottleneck Spanning Tree του G.

Σημείωση: Πρόκειται για την Άσκηση **23-3** του CLRS.