Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
5η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 3/2/2011

Άσκηση 1: Βελτίωση Οδικού Δικτύου

Έστω οδικό δίκτυο $G(V, E, \ell)$ που συνδέει ένα σύνολο πόλεων V. Θεωρούμε ότι το δίκτυο είναι κατευθυνόμενο, και ότι κάθε δρόμος $(u, v) \in E$ έχει (μη αρνητικό) μήκος $\ell(u, v)$. Πρόκειται να κατασκευαστεί ένας νέος δρόμος, και υπάρχει λίστα E' με ακμές-προτάσεις για ζεύγη πόλεων τα οποία μπορεί να συνδέσει. Κάθε ακμή-πρόταση $(u, v) \in E'$ συνοδεύεται από αντίστοιχο μήκος $\ell'(u, v)$. Το ζητούμενο είναι να επιλέξουμε την ακμή-πρόταση που επιτυγχάνει την μέγιστη μείωση της απόστασης μεταξύ δύο δεδομένων πόλεων $s, t \in V$. Να διατυπώσετε έναν όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Σημείωση:* Πρόκειται για την Άσκηση **4.10** του DPV.

Άσκηση 2: Μείωση Μεταφορικής Ικανότητας

Θεωρούμε δίκτυο ροής $G(V, E)$ με αρχική κορυφή $s \in V$, καταληκτική κορυφή $t \in V$, και μοναδιαίες χωρητικότητες στις ακμές, και φυσικό αριθμό k. Το ζητούμενο είναι να βρούμε k ακμές η διαγραφή των οποίων προκαλεί την μεγαλύτερη δυνατή μείωση στην μέγιστη ροή μεταξύ των κορυφών s και t. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας, και να διερευνήσετε αν η προσέγγιση που ακολουθήσατε γενικεύεται για ακμές διαφορετικής χωρητικότητας. *Σημείωση:* Πρόκειται για την Άσκηση **7.12** του KT.

Άσκηση 3: Προγραμματισμός Εφημεριών

Ένα νοσοκομείο που απασχολεί k γιατρούς προγραμματίζει τις εφημερίες τους για τις επόμενες n ημέρες. Κάθε γιατρός j, $1 \leq j \leq k$, έχει δηλώσει ένα σύνολο ημερών L_j στις οποίες είναι διαθέσιμος για εφημερία, και ότι ο μέγιστος αριθμός εφημεριών που μπορεί να κάνει είναι ℓ_j. Επιπλέον, για κάθε ημέρα i, $1 \leq i \leq n$, είναι γνωστός ο ακριβής αριθμός p_i των γιατρών που εφημερεύουν. Πρέπει λοιπόν να υπολογισθεί ένα σύνολο ημερών εφημερίας $L'_j \subseteq L_j$, με $|L'_j| \leq \ell_j$, για κάθε γιατρό j, ώστε κάθε ημέρα i να περιλαμβάνεται στα σύνολα ημερών εφημερίας ακριβώς p_i γιατρών, ή να διαπιστωθεί ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Σημείωση:* Πρόκειται για την Άσκηση **7.19** του KT.

Άσκηση 4: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-Πλήρη:

Συνδετικό Δέντρο με Ελάχιστο Αριθμό Φύλλων (Min Leaf Spanning Tree)

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ και φυσικός αριθμός k, $2 \le k < |V|$.

Ερώτηση: Έχει το G συνδετικό δέντρο με k ή λιγότερα φύλλα (δηλ. κορυφές βαθμού 1);

Κυρίαρχο Σύνολο (Dominating Set)

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ και φυσικός αριθμός k, $1 \le k \le |V|$.

Ερώτηση: Έχει το G κυρίαρχο σύνολο $D \subseteq V$ με $|D| \le k$; Ένα σύνολο κορυφών $D \subseteq V$ αποτελεί κυρίαρχο σύνολο για ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ αν κάθε κορυφή $v \in V$ είτε ανήκει στο D είτε συνδέεται με κάποια κορυφή του D.

Δέντρο Steiner (Steiner Tree)

Είσοδος: Πλήρες μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ με μήκη $\ell : E \mapsto \mathbb{N}$ στις ακμές, υποσύνολο κορυφών $C \subset V$, και φυσικός αριθμός B. Τα μήκη των ακμών ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, δηλ. για κάθε $x,y,z \in V$, $\ell(x,y) \le \ell(x,z) + \ell(z,y)$.

Ερώτηση: Υπάρχει συνεκτικό υπογράφημα του G που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του C (και ενδεχομένως κάποιες κορυφές του $V \setminus C$) με συνολικό μήκος που δεν ξεπερνά το B;

Σημείωση: Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ζητούμενο υπογράφημα είναι δέντρο. Ένα τέτοιο δέντρο ονομάζεται *δέντρο Steiner* για το C. Το πρόβλημα είναι διαφορετικό από τον υπολογισμό ενός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου, αφού το βέλτιστο δέντρο Steiner δεν περιλαμβάνει κατ' ανάγκη όλες τις κορυφές του V, αλλά μπορεί να εκμεταλλευθεί την ύπαρξη κάποιων κορυφών του $V \setminus C$ για να επιτύχει μικρότερο συνολικό μήκος σε σχέση με το συνολικό μήκος ενός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου στο επαγόμενο υπογράφημα που ορίζεται από το C.

Χωροθέτηση Υπηρεσιών (Facility Location)

Είσοδος: Πλήρες μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$ με αποστάσεις $\ell : E \mapsto \mathbb{N}$ στις ακμές και κόστη $f : V \mapsto \mathbb{N}$ στις κορυφές, και φυσικός αριθμός B. Οι αποστάσεις ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, δηλ. για κάθε $x,y,z \in V$, $\ell(x,y) \le \ell(x,z) + \ell(z,y)$.

Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο κορυφών $C \subseteq V$ για το οποίο το συνολικό κόστος των κορυφών του C και η συνολική απόσταση κάθε κορυφής του $V \setminus C$ από την πλησιέστερη κορυφή στο C δεν ξεπερνά το B; Πρέπει δηλαδή να διαπιστώσουμε αν υπάρχει $C \subseteq V$ με συνολικό κόστος

$$\sum_{v \in C} f(v) + \sum_{u \in V \setminus C} \min_{v \in C}\{\ell(u,v)\} \le B \tag{1}$$

Σημείωση: Η αντιστοιχία με το πρόβλημα χωροθέτησης υπηρεσιών προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι σε κάθε κορυφή $u \in V$ υπάρχει ένας πελάτης που πρέπει να συνδεθεί στην πλησιέστερη θέση όπου παρέχεται μια υπηρεσία. Οι αποστάσεις αντιστοιχούν στα κόστη σύνδεσης των πελατών. Το κόστος $f(v)$ αντιστοιχεί στο κόστος εγκατάστασης της υπηρεσίας στη θέση v. Επιλέγοντας να εγκαταστήσουμε την υπηρεσία στις κορυφές του C, έχουμε συνολικό κόστος εγκατάστασης $\sum_{v \in C} f(v)$, και κόστος σύνδεσης για κάθε κορυφή $u \in V \setminus C$ ίσο με $\min_{v \in C}\{\ell(u,v)\}$ (κάθε πελάτης συνδέεται στην πλησιέστερη θέση, το κόστος σύνδεσης για τους πελάτες στο C είναι μηδενικό). Το συνολικό κόστος του C δίνεται από την (1).

Υπόδειξη: Για το δεύτερο και το τρίτο πρόβλημα, μπορείτε να δοκιμάσετε αναγωγές από το Κάλυμμα Κορυφών (Vertex Cover). Για το τέταρτο πρόβλημα, μπορείτε να δοκιμάσετε αναγωγή από το Κυρίαρχο Σύνολο (Dominating Set).