

Αναζήτηση Κατά Βάθος

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με **απομάκρυνση** από αρχική.
- Πρώτη επίσκεψη σε **ανεξερεύνητη** κορυφή u :
 - Εξερεύνηση (αναδρομικά) **όλων** των (ανεξερεύνητων) **γειτόνων** της u , πριν ολοκληρώσουμε με u .
- Φύσει **DFS(κορυφή u)**
αναδρομική διαδικασία: **for** κάθε κορυφή v γειτονική της u **do**
if δεν έχω επισκεφθεί τη v προηγουμένως **then**
σημείωσε ακμή (u, v) ; **DFS**(v);
- **Τρία είδη** κορυφών:
 - **Ανεξερεύνητη:** όχι επίσκεψη ακόμη.
 - **Υπο-εξέταση:** επίσκεψη και εξερευνούμε γείτονες.
 - **Εξερευνημένη:** ολοκλήρωση διαδικασίας.

Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Κορυφές περνούν από παραπάνω στάδια:
 - Αρχικά όλες οι κορυφές **ανεξερεύνητες**.
 - Πρώτη επίσκεψη ανεξερεύνητης κορ. → **υπό-εξέταση**.
 - Ολοκλήρωση DFS για (ανεξερ.) γείτονες κορ. → **εξερευνημένη**.
- Κορυφή u τίθεται **υπό-εξέταση**:
 - Όλες οι κορυφές που είναι **προσπελάσιμες από u** και είναι **ανεξερεύνητες** θα τεθούν **εξερευνημένες πριν u τεθεί εξερευνημένη**.
- Εξέλιξη διαδικασίας αποτυπώνεται σε **DFS-δάσος** και **«χρόνου»** πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης.
 - DFS-δάσος: **ακμές πρώτης επίσκεψης, ακυκλικό**.

Υλοποίηση

- Πίνακας κατάστασης: $\mathbf{m[v]}$ = { A, Y, E }.
- Πίνακας προγόνων: $\mathbf{p[v]}$ = πατέρας v στο DFS-δάσος.
- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης $\mathbf{d[v]}$ και αναχώρησης $\mathbf{f[v]}$.
- Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(\mathbf{n + m})$.
- DFS σε (α) δέντρο, (β) πλήρες γράφημα, (γ) κύκλο.

DFS_Init($G(V, E)$)

$t \leftarrow 0$;

for all $v \in V$ **do**

$m[v] \leftarrow A$; $p[v] \leftarrow \text{NULL}$;

for all $v \in V$ **do**

if $m[v] = A$ **then** DFS(v);

DFS(v)

$m[v] \leftarrow Y$; $d[v] \leftarrow ++t$;

for all $u \in L[v]$ **do**

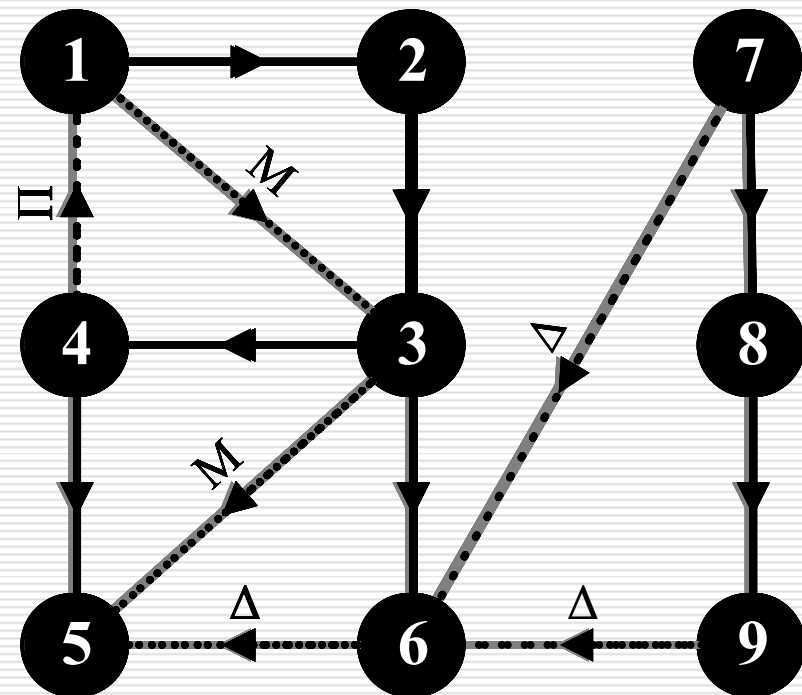
if $m[u] = A$ **then**

$p[u] \leftarrow v$; DFS(u);

$m[v] \leftarrow E$; $f[v] \leftarrow ++t$;

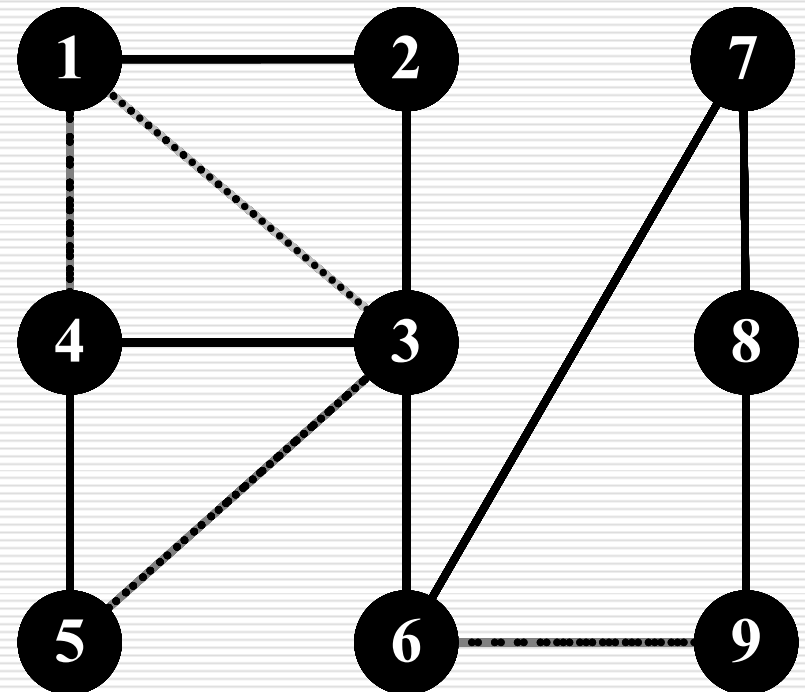
Παράδειγμα – Κατηγορίες Ακμών

- Ακμές δάσους / δέντρου:
 - Εξερεύνηση (u, v) όταν v ανεξερεύνητη.
- Πίσω ακμές:
 - Εξερεύνηση (u, v) όταν v υπό-εξέταση: κύκλος.
- Μπροστά ακμές:
 - Εξερεύνηση (u, v) όταν v εξερευνημένη και v απόγονος u στο δέντρο.
- Ακμές διασταύρωσης:
 - Εξερεύνηση (u, v) όταν v εξερευνημένη και v **όχι** απόγονος u στο δέντρο.



Παράδειγμα

- DFS σε **μη-κατευθ.** γράφημα παράγει μόνο **ακμές δέντρου** και **πίσω ακμές**.
 - Ακμή $\{v, u\}$ με $d[v] < d[u]$ (πρώτα πρώτη επίσκεψη σε v).
 - Πρώτα v ΥΕ, μετά u ΥΕ, μετά u Εξερ, τέλος v Εξερ.
 - Αν κατεύθυνση (v, u) εξερευνήθηκε **πρώτη**, τότε $\{v, u\}$ **ακμή δέντρου**.
 - Αν κατεύθυνση (u, v) εξερευνήθηκε **πρώτη**, τότε $\{v, u\}$ **πίσω ακμή**.



Μερικές Ιδιότητες

- Για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, DFS υπολογίζει **συνεκτικές συνιστώσες** (όπως και BFS).
- Αν v απόγονος u στο DFS-δάσος, $[d[v], f[v]] \subset [d[u], f[u]]$
Αν v όχι απόγονος u στο DFS-δάσος, $[d[v], f[v]] \cap [d[u], f[u]] = \emptyset$
- Γράφημα **ακυκλικό** ανν DFS **δεν** παράγει **πίσω ακμές**.
 - Εξερεύνηση **πίσω ακμής** (u, v) όταν $v \in E \Rightarrow$
Μονοπάτι $v \rightarrow u$ και ακμή $(u, v) \Rightarrow$ κύκλος.
 - Έστω κύκλος C , v πρώτη κορυφή C που τίθεται $\in E$,
και (u, v) ακμή C που εισέρχεται στην v .
 - u απόγονος της v στο DFS-δάσος γιατί:
 - Υπάρχει $v \rightarrow u$ μονοπάτι.
 - Όλες οι άλλες κορυφές του C είναι A όταν v γίνεται $\in E$.
 - Άρα (u, v) **πίσω ακμή**.

Εφαρμογές

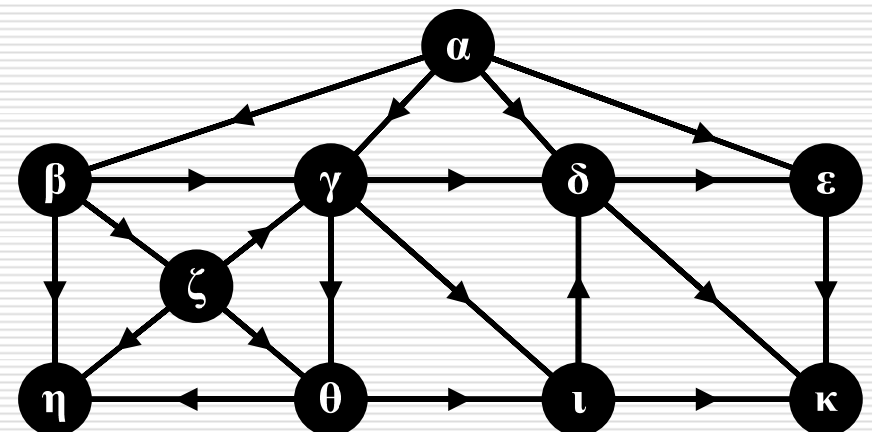
- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης δίνουν πληροφορίες για δομή γραφήματος:
 - Τοπολογική διάταξη σε Directed Acyclic Graphs (DAGs).
 - Σημεία κοπής και γέφυρες σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
 - Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες σε κατευθυνόμενα γραφήματα.

Τοπολογική Διάταξη

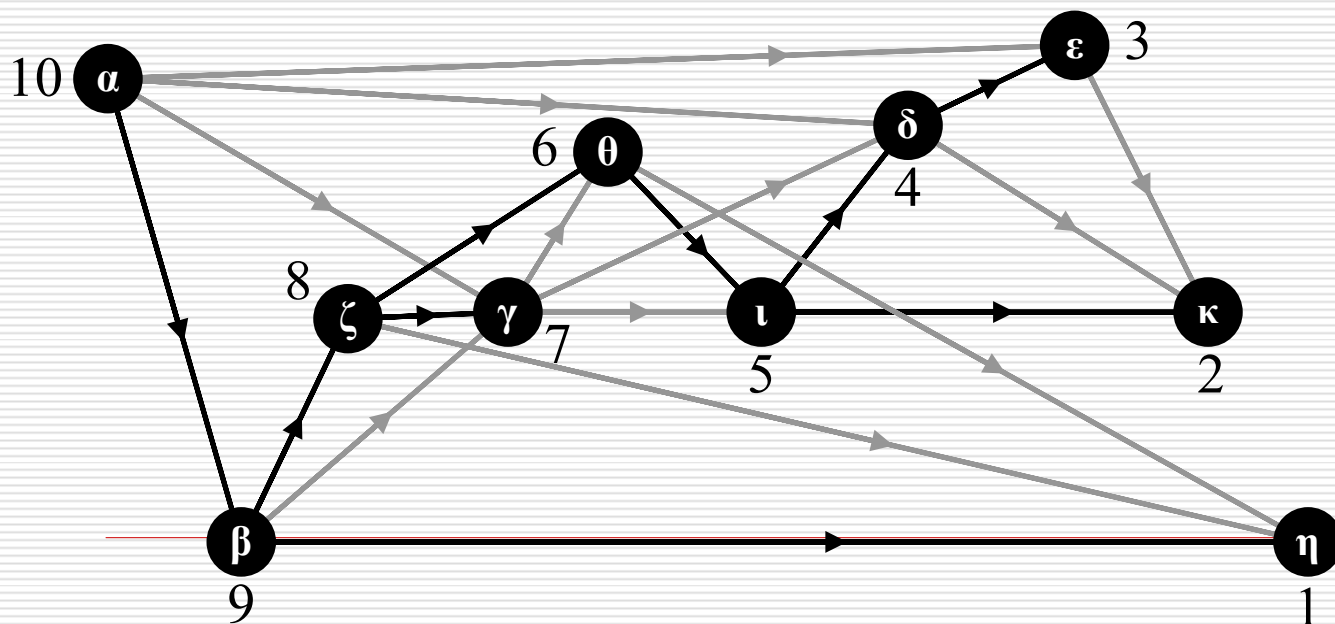
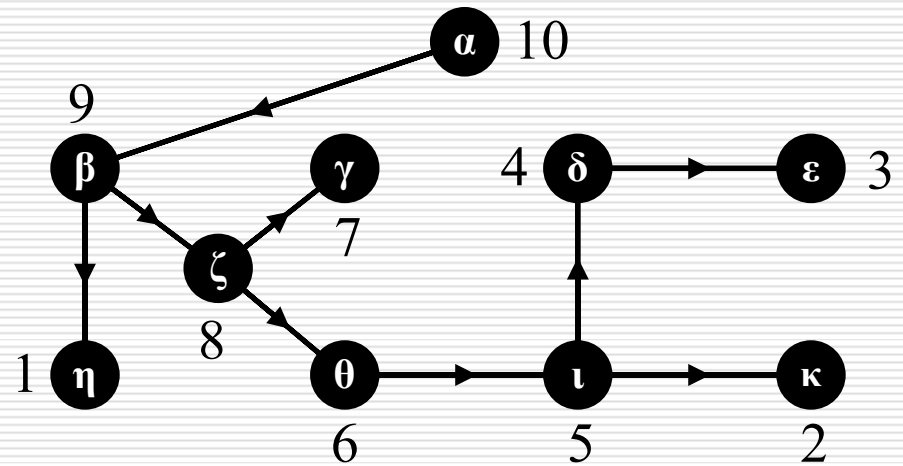
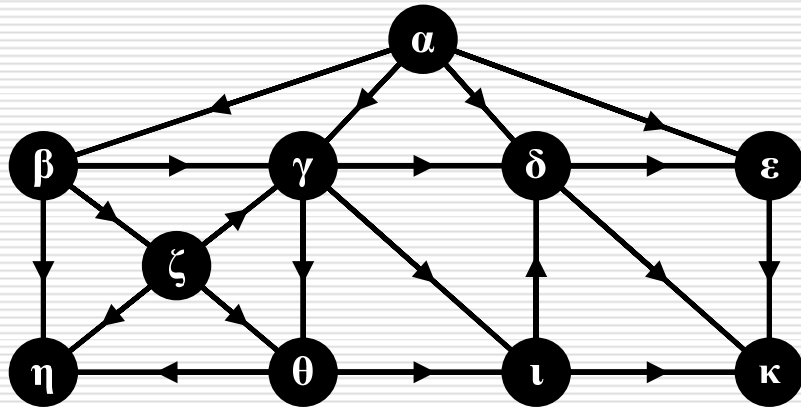
- **DAG** (Directed Acyclic Graph) αντιστοιχεί σε σχέση μερικής διάταξης:
 - Ακμή $(u, v) \Leftrightarrow u \leq v$ (δηλ. u «προηγείται» v).
 - Σειρά υπολογισμού αλγεβρικών εκφράσεων, π.χ.
$$(ac)x^2 + [(a + c)(b + d) - ac - bd]x + bd$$
 - Προγραμματισμός εργασιών σε σύνθετα έργα.
- Ύπαρξη κύκλου δεν συνάδει με «διάταξη», έστω μερική.
- DFS ελέγχει για ύπαρξη κύκλων και υπολογίζει «σειρά» κορυφών **συμβατή** με μερική διάταξη του DAG.
 - Τοπολογική διάταξη.

Τοπολογική Διάταξη

- ... μετάθεση n κορυφών κατευθυνόμενου $G(V, E)$ ώστε
$$\forall (u, v) \in E, \pi(u) < \pi(v)$$
 - Δηλ. κορυφές σε ευθεία ώστε όλες οι ακμές να έχουν φορά από αριστερά προς τα δεξιά.
- Τοπολογική διάταξη αν γράφημα ακυκλικό (DAG).
 - Κορυφές σε φθίνουσα σειρά χρόνων αναχώρησης του DFS, δηλ. $f[v_1] > f[v_2] > \dots > f[v_n]$
 - Υλοποίηση με στοίβα:
Εξερευνημένη κορυφή μπαίνει στην ουρά.
 - Σειρά στην ουρά αντιστοιχεί σε τοπολογική διάταξη.
 - Χρόνος $\Theta(n+m)$.

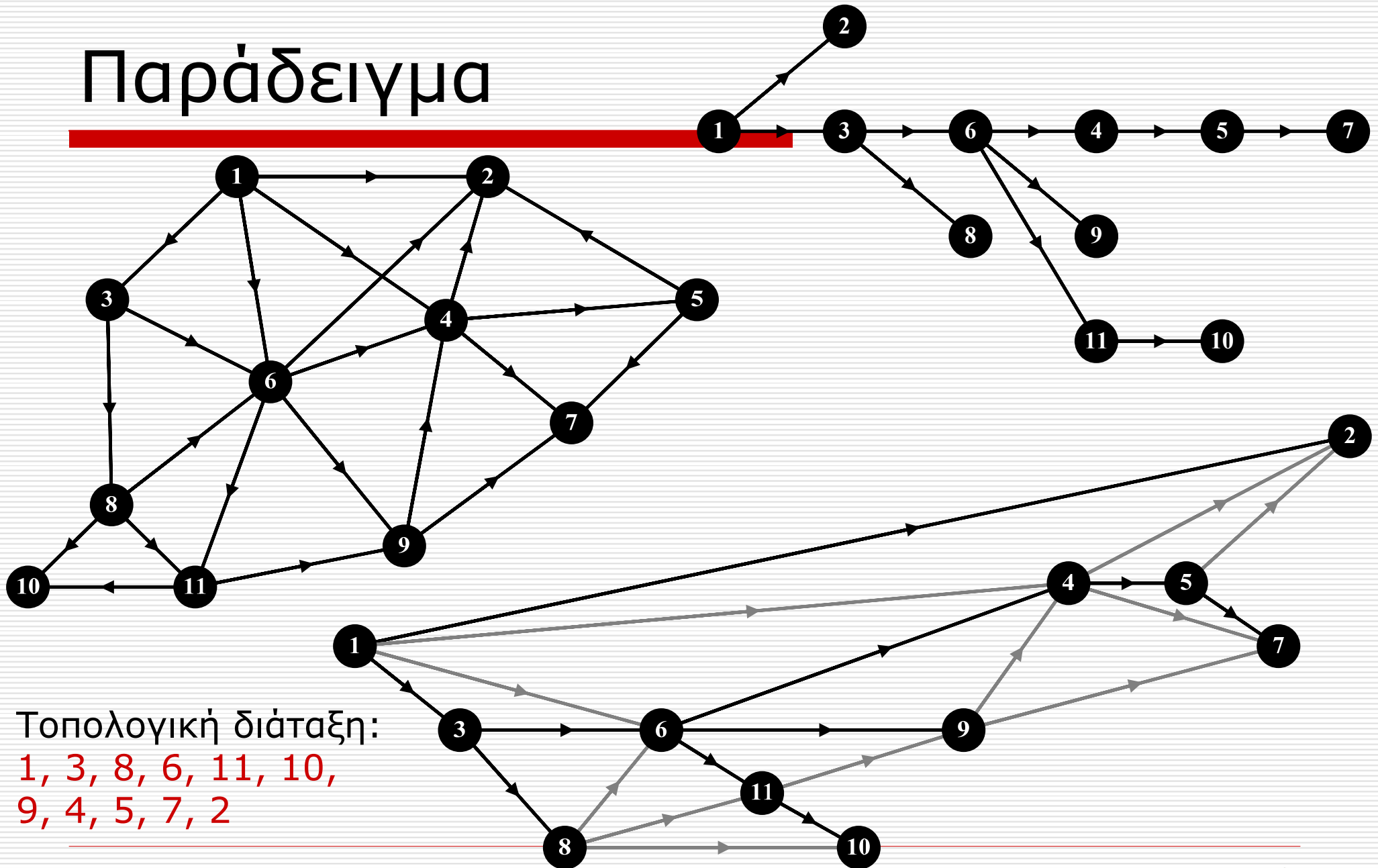


Παράδειγμα



Τοπολογική διάταξη:
α, β, ζ, γ, θ, ι, δ, ε, κ, η

Παράδειγμα



Τοπολογική Διάταξη: Ορθότητα

- Έστω DAG $G(V, E)$. Θδο $\forall (u, v) \in E, f[u] > f[v]$.
 - Εξερεύνηση (u, v) συμβαίνει όταν u YE και v Ανεξ. ή Εξερ.
 - Αν v YE, τότε (u, v) πίσω ακμή \Rightarrow κύκλος!
 - Αν v Εξερ., τότε εξερεύνηση της v ολοκληρώθηκε πριν ολοκληρωθεί εξερεύνηση u , άρα $f[u] > f[v]$.
 - Αν v Ανεξ., τότε v απόγονος της u στο DFS-δάσος.
 - Άρα $f[u] > f[v]$, γιατί πρώτα τίθεται $f[v]$ και μετά $f[u]$.
- Έστω σύστημα με n (πραγματικές) μεταβλητές x_1, \dots, x_n και m περιορισμούς της μορφής $x_i < x_j$.
 - Αλγόριθμος με χ.ε. $O(n+m)$ που υπολογίζει μια λύση του συστήματος ή αποφαινεται ότι το σύστημα δεν έχει λύση;