Συντομότερα Μονοπάτια για Όλα τα Ζεύγη Κορυφών

- Υπολογισμός απόστασης d(v, u) και συντομότερου v – u μονοπατιού για κάθε ζεύγος (v, u) $\in$ V $\times$ V.
- Αλγόριθμος για ΣΜ από μία κορυφή για κάθε s $\in$ V.
  - Αρνητικά μήκη: Bellman-Ford σε χρόνο $\Theta(n^2 m)$.
  - Μη-αρνητικά μήκη: Dijkstra σε χρόνο $\Theta(n\,m + n^2 \log n)$.
- Αρνητικά μήκη: Floyd-Warshall σε χρόνο $\Theta(n^3)$.
- Αναπαράσταση λύσης:
  - Αποστάσεις: πίνακας D[1..n][1..n]
  - Συντομότερα μονοπάτια: n ΔΣΜ, ένα για κάθε αρχική κορυφή.
    - Πίνακας P[1..n][1..n]: n πίνακες προγόνων.
    - Γραμμή P[i]: πίνακας προγόνων ΔΣΜ(v_i).

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- Θεωρούμε γράφημα $G(V, E, w)$ με μήκη στις ακμές.
  - Καθορισμένη (αυθαίρετη) αρίθμηση κορυφών $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- Αναπαράσταση γραφήματος με πίνακα γειτνίασης:

$$w(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & v_i = v_j \\ w(v_i, v_j) & v_i \neq v_j \ \ (v_i, v_j) \in E \\ \infty & v_i \neq v_j \ \ (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

- Υπολογισμός απόστασης $d(v_i, v_j)$ από $d(v_i, v_k)$, $d(v_k, v_j)$ για όλα τα $k \in V \setminus \{v_i, v_j\}$:

$$d(v_i, v_j) = \min\{w(v_i, v_j), \min_{v_k \in V \setminus \{v_i, v_j\}} \{d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)\}\}$$

  - Φαύλος κύκλος(;): $d(v_i, v_k) \rightarrow d(v_i, v_j)$ και $d(v_i, v_j) \rightarrow d(v_i, v_k)$
  - **Δυναμικός προγραμματισμός**: υπολογισμός όλων με συστηματικό bottom-up τρόπο!

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- $D_k[v_i, v_j]$: μήκος συντομότερου $v_i - v_j$ μονοπατιού με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από $V_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$
  - Αρχικά $D_0[v_i, v_j] = w(v_i, v_j)$ γιατί $V_0 = \emptyset$.
  - Έστω ότι γνωρίζουμε $D_{k-1}[v_i, v_j]$ για όλα τα ζεύγη v_i, v_j .
  - $D_k[v_i, v_j]$ διέρχεται από v_k καμία ή μία φορά (μονοπάτι!):

$$D_k[v_i, v_j] = \min\{D_{k-1}[v_i, v_j], D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j]\}$$

  - Αναδρομική σχέση για $D_0, D_1, \ldots, D_n$:

$$D_k[v_i, v_j] = \begin{cases} w(v_i, v_j) & k = 0 \\ \min\{D_{k-1}[v_i, v_j], D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j]\} & k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

  - Υπολογισμός D_n με **δυναμικό προγραμματισμό**.
  - Κύκλος αρνητικού μήκους αν $D_n[v_i, v_i] < 0$.

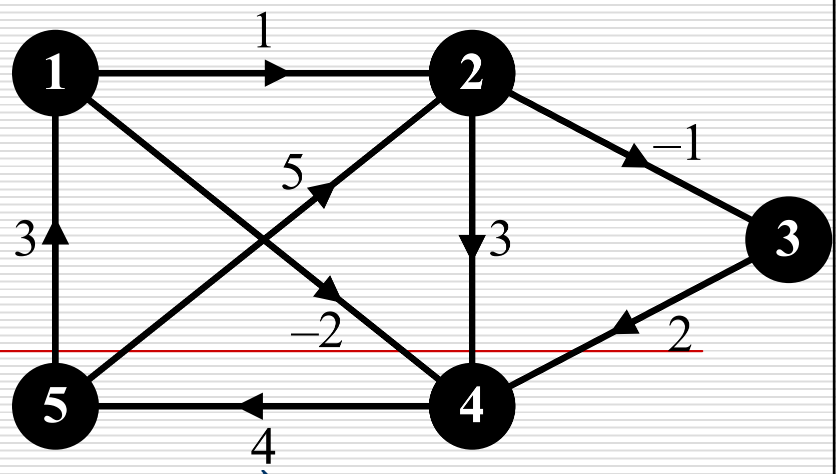
Αλγόριθμος Floyd-Warshall

- Τυπικός δυναμικός προγραμματισμός:

Χρόνος: **Θ(n³)**

$$
\begin{array}{l}
\text{Floyd-Warshall}(G(V,E,w)) \\
\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad \textbf{for } j \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad \textbf{if } (v_i, v_j) \in E \textbf{ then } D_0[i,j] \leftarrow w(v_i, v_j); \\
\quad\quad\quad \textbf{else } D_0[i,j] \leftarrow \infty; \\
\quad\quad D_0[i,i] \leftarrow 0; \\
\quad \textbf{for } k \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad \textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad \textbf{for } j \leftarrow 1 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad\quad\quad \textbf{if } D_{k-1}[i,j] > D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j] \textbf{ then} \\
\quad\quad\quad\quad\quad D_k[i,j] \leftarrow D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]; \\
\quad\quad\quad\quad \textbf{else } D_k[i,j] \leftarrow D_{k-1}[i,j];
\end{array}
$$

Παράδειγμα



$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 5 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & \infty \\ \infty & 0 & -1 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ \infty & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 8 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 9 & 10 & 0 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

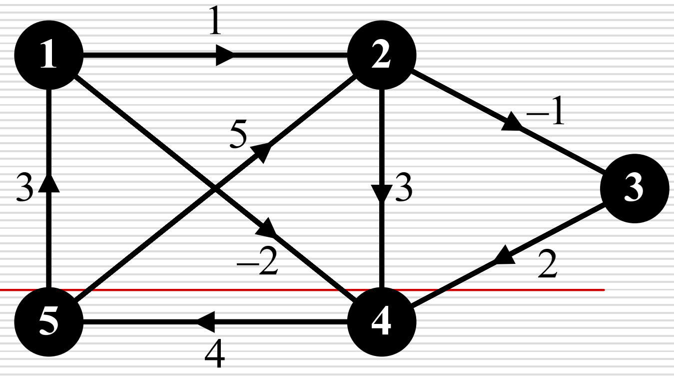
Υπολογισμός Συντομότερων Μονοπατιών

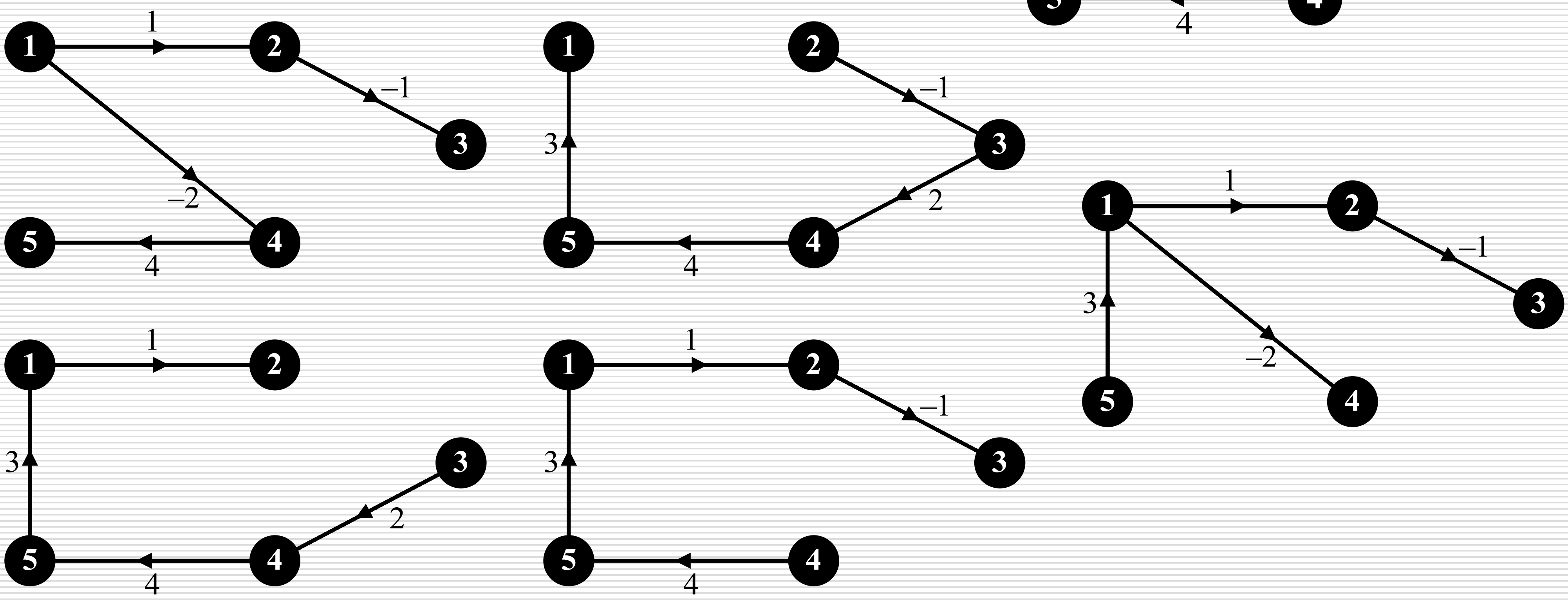
- $P_k[v_i, \cdot\,]$: ΔΣΜ(v_i) με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από V_k .
  - Αποστάσεις $D_k[v_i, \cdot\,]$ αντιστοιχούν σε μονοπάτια $P_k[v_i, \cdot\,]$.
  - $P_k[v_i, v_j]$: προηγούμενη κορυφή της v_j στο συντομότερο $v_i - v_j$ μονοπάτι με ενδιάμεσες κορυφές μόνο από V_k .
- P_0 καθορίζεται από πίνακα γειτνίασης: $P_0[v_i, v_j] = \begin{cases} \text{NULL} & \text{αν } i = j \text{ ή } (v_i, v_j) \notin E \\ v_i & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
- Αναδρομική σχέση για $P_0, P_1, \ldots, P_n$:

$$P_k[v_i, v_j] = \begin{cases} P_{k-1}[v_i, v_j] & D_{k-1}[v_i, v_j] \leq D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j] \\ P_{k-1}[v_k, v_j] & D_{k-1}[v_i, v_j] > D_{k-1}[v_i, v_k] + D_{k-1}[v_k, v_j] \end{cases}$$

  - Υπολογισμός P_n ταυτόχρονα με υπολογισμό D_n .
  - Εύκολη τροποποίηση προηγούμενης υλοποίησης.

Παράδειγμα





$$P_5 = \begin{pmatrix} \mathrm{NULL} & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & \mathrm{NULL} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & \mathrm{NULL} & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & \mathrm{NULL} & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & \mathrm{NULL} \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος Johnson

- Συντομότερα μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών σε αραιά γραφήματα με αρνητικά μήκη:
  - **Μετατροπή** αρνητικών μηκών σε **μη αρνητικά** χωρίς να αλλάξουν τα συντομότερα μονοπάτια.
- Αλγόριθμος για γράφημα G(V, E, w):
  - Νέα κορυφή s που συνδέεται με κάθε u $\in$ V με ακμή μηδενικού μήκους: G′(V $\cup$ {s}, E $\cup$ {(s, u)}, w).
  - Bellman-Ford για G′ με αρχική κορυφή s. Έστω h(u) απόσταση κορυφής u $\in$ V από s.
  - Αν όχι κύκλος αρνητικού μήκους, υπολόγισε νέα (μη αρνητικά) μήκη: $\hat{w}(v,u) = w(v,u) + h(v) - h(u), \forall (v,u) \in E$
  - Για κάθε u $\in$ V, Dijkstra σε $G(V, E, \hat{w})$ με αρχική κορυφή u.

Αλγόριθμος Johnson

- Χρονική πολυπλοκότητα:
  - Bellman-Ford και n φορές Dijkstra: $\Theta(n\,m + n^2 \log n)$.
- Ορθότητα:
  - Νέα μήκη μη αρνητικά: h(·) αποστάσεις από s, και ισχύει ότι

$$\forall (v,u) \in E,\, h(u) \leq h(v) + w(v,u) \Rightarrow \hat{w}(v,u) \geq 0$$

  - Μεταβολή στα μήκη δεν επηρεάζει συντομότερα μονοπάτια.
  - Μήκος **κάθε** α – β μονοπατιού μεταβάλλεται κατά h(β) – h(α).
  - Έστω $p \equiv (\alpha = v_0, v_1, \ldots, v_k = \beta)$ οποιοδήποτε α – β μονοπάτι.

$$\hat{\ell}(p) = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{w}(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} [w(v_i, v_{i+1}) + h(v_i) - h(v_{i+1})]$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) + h(v_0) - h(v_k) = \ell(p) + h(\alpha) - h(\beta)$$

Σύνοψη

- Συντομότερα μονοπάτια από μία αρχική κορυφή s:
  - Αρνητικά μήκη: Bellman-Ford σε χρόνο $\Theta(n\, m)$.
    - Δυναμικός προγραμματισμός.
  - DAGs με αρνητικά μήκη σε χρόνο $\Theta(m + n)$.
  - Μη-αρνητικά μήκη: Dijkstra σε χρόνο $\Theta(m + n \log n)$.
    - Απληστία.
- Συντομότερα μονοπάτια για όλα τα ζεύγη κορυφών:
  - Αρνητικά μήκη: Floyd-Warshall σε χρόνο $\Theta(n^3)$.
    - Δυναμικός προγραμματισμός.
  - (Μη-)αρνητικά μήκη και αραιά γραφήματα, $m = o(n^2)$:
    - n φορές Dijkstra σε χρόνο $\Theta(n\, m + n^2 \log n)$.
    - Αν αρνητικά μήκη, αλγ. Johnson για μετατροπή σε θετικά!