Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για NP-Δύσκολα Προβλήματα

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αντιμετώπιση NP-Δυσκολίας

- Αν P $\neq$ NP, όχι αλγόριθμος που για όλα τα στιγμιότυπα NP-δύσκολου προβλήματος υπολογίζει βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Ευρετικές τεχνικές: συχνά γρήγορα βέλτιστη λύση αλλά και δύσκολα στιγμιότυπα (αργά ή / και όχι βέλτιστη λύση).
  - Τοπική αναζήτηση.
  - Simulated annealing.
  - Γενετικοί αλγόριθμοι.
  - Branch-and-Bound, Branch-and-Cut.
  - …

Αντιμετώπιση NP-Δυσκολίας

- «Εύκολες» περιπτώσεις.
- Ανάλυση μέσης περίπτωσης / πιθανοτική ανάλυση.
  - Γρήγοροι σε στιγμιότυπα που εμφανίζονται συχνότερα (αργοί μόνο για στιγμιότυπα με μικρή πιθανότητα).
  - Διαφορά από ευρετικές τεχνικές: θεωρητική ανάλυση.
    - Γνωρίζουμε πιθανότητα και πότε καλή / κακή απόδοση.
- Αλγόριθμοι προσέγγισης [Johnson, Sahni and Gonzalez, …, 70's]
  - Αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου (χ.π.).
  - Όχι (πάντα) βέλτιστη λύση.
  - Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης ως προς ποιότητα λύσης.

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- Απόδοση χειρότερης περίπτωσης γνωστών ευρετικών αλγόριθμων (αρχικά κυρίως άπληστων).
- Σχεδιασμός poly-time αλγόριθμων που συμπεριφέρονται **αποδεδειγμένα καλά** για κάθε στιγμιότυπο.
- **Λόγος προσέγγισης**
  - Αλγόριθμου Α για πρόβλημα Π (πάντα ≥ 1):

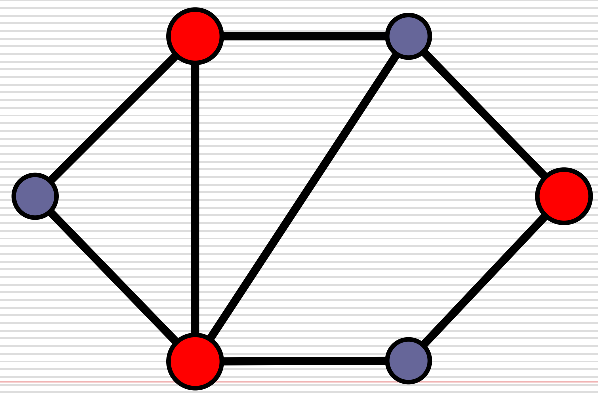
$$\textbf{Μεγιστοποίηση:}\quad \gamma_\Pi(A) = \max_{\sigma \in S_\Pi} \frac{f_\sigma(\lambda^*(\sigma))}{f_\sigma(\lambda_A(\sigma))}$$

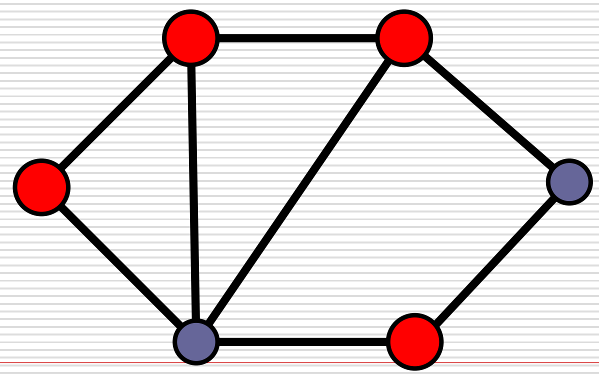
$$\textbf{Ελαχιστοποίηση:}\quad \gamma_\Pi(A) = \max_{\sigma \in S_\Pi} \frac{f_\sigma(\lambda_A(\sigma))}{f_\sigma(\lambda^*(\sigma))}$$

  - Προβλήματος Π: $\gamma_\Pi = \min_{A \text{ poly-time alg}} \{\gamma_\Pi(A)\}$

Ελάχιστο Κάλυμμα Κορυφών

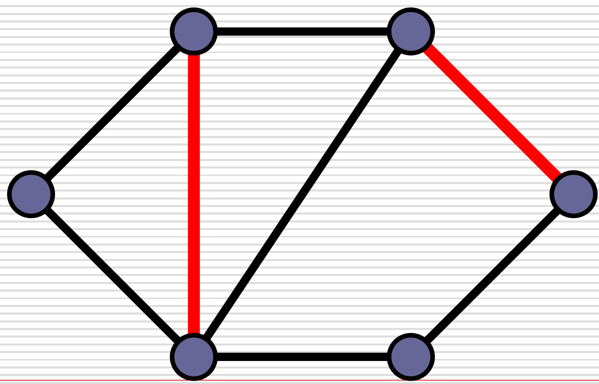
- Είσοδος: γράφημα $G(V, E)$
- Εφικτή λύση: υποσύνολο κορυφών $C \subseteq V$:
  κάθε ακμή τουλάχιστον ένα άκρο στο C
  - C είναι κάλυμμα κορυφών (vertex cover).
- Στόχος: κάλυμμα κορυφών με ελάχιστο #κορυφών.
- **NP-δύσκολο** πρόβλημα.

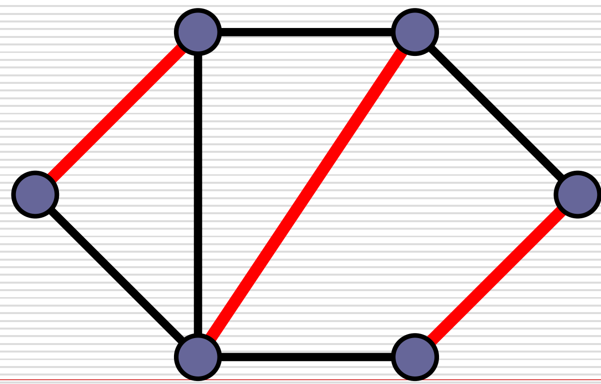




Ταίριασμα

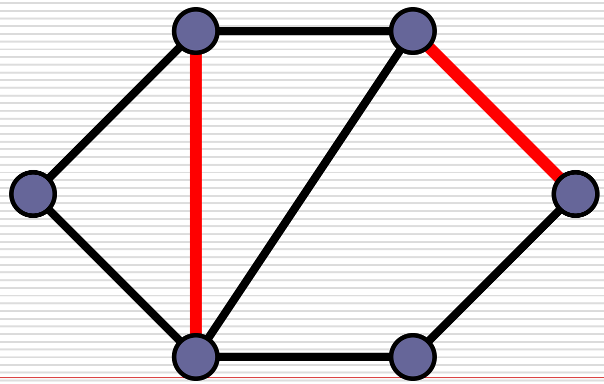
- Ταίριασμα : υποσύνολο ακμών $M \subseteq E$ χωρίς κοινά άκρα.
- Για κάθε ταίριασμα Μ, τουλάχιστον ένα από τα άκρα ακμών Μ ανήκει σε κάθε κάλυμμα κορυφών:
  - $\forall$ταίριασμα Μ, ελάχιστο κάλυμμα κορυφών $|C^*| \geq |M|$

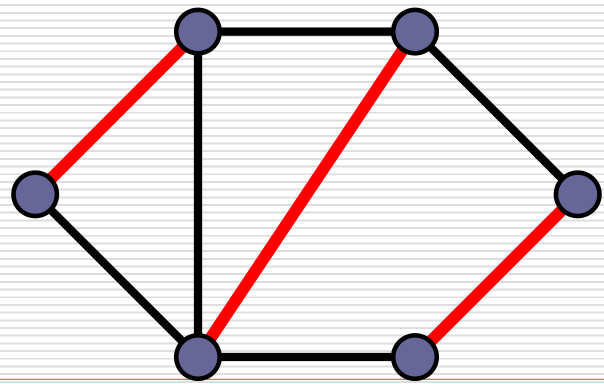




Μεγιστοτικό Ταίριασμα

- Μεγιστοτικό ταίριασμα : ταίριασμα που αν προσθέσουμε ακμή παύει να είναι ταίριασμα.
  - Μεγιστοτικό ταίριασμα M : κάθε ακμή εκτός M έχει κοινό άκρο με ακμή του M.
  - Άκρα ακμών μεγιστοτικού ταιριάσματος M συγκροτούν κάλυμμα κορυφών C.
  - $|C| = 2|M| \leq 2|C^*|$





Αλγόριθμος ΜΜ

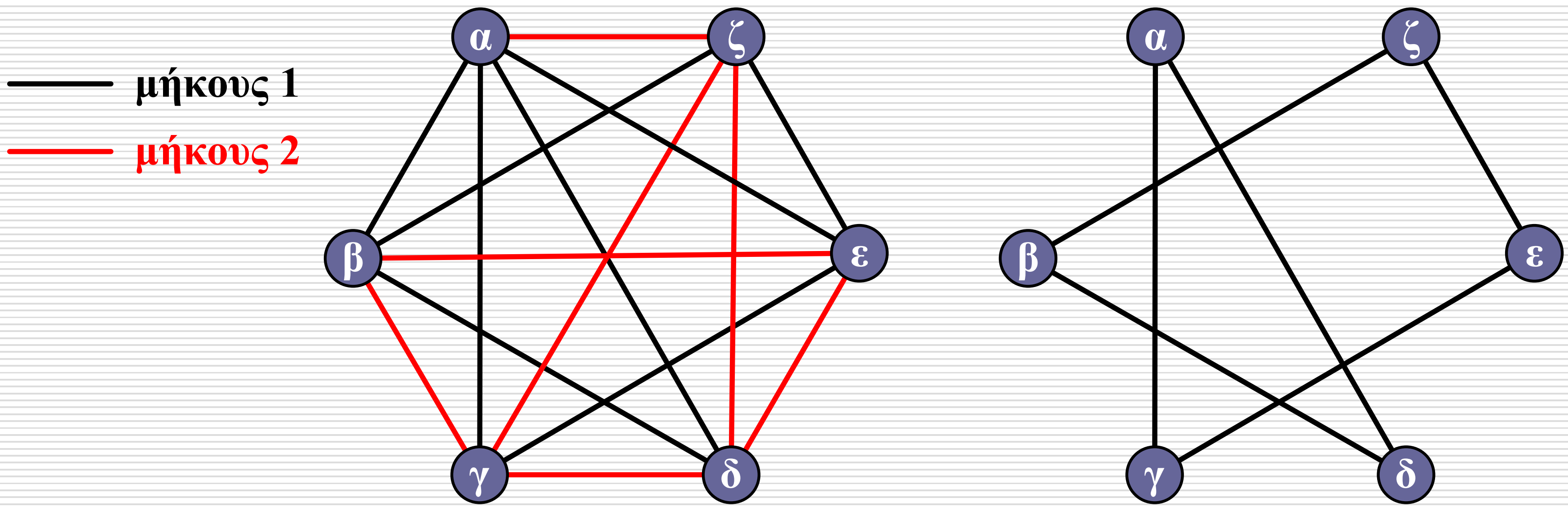
- Υπολογισμός μεγιστοτικού ταιριάσματος Μ.
  - Προσθήκη ακμών ενόσω υπάρχουν ακμές που προσθήκη τους δίνει ταίριασμα.
- Κάλυμμα κορυφών C : όλα τα άκρα ακμών Μ.
- Πολυωνυμικός χρόνος.
- **Ορθότητα** : ιδιότητα μεγιστοτικού ταιριάσματος.
- **Λόγος προσέγγισης = 2.**
  - $|C| = 2|M| \leq 2|C^*|$ (πάνω φράγμα).
  - Παραδείγματα όπου κόστος ΜΜ διπλάσιο βέλτιστου.

Βασική Ιδέα (ελαχιστοποίηση)

- Ξεκινώ από κάτω φράγμα στο κόστος βέλτιστης λύσης.
  - Για κάθε ταίριασμα M, $|C^*| \geq |M|$.
  - Κάτω φράγμα εκφράζεται σαν συνάρτηση κάποιων άλλων παραμέτρων του στιγμιότυπου εισόδου.
  - Πολλές φορές κάτω φράγμα προκύπτει από **δυϊκότητα.**
- (Πολυωνυμικός) αλγόριθμος: εφικτή λύση με κόστος = συνάρτηση των παραμέτρων στο κάτω φράγμα.
  - Μεγιστοτικό ταίριασμα M: κάλυμμα κορυφών C, $|C| = 2\,|M|$.
- Σύγκριση δίνει άνω φράγμα στο λόγο προσέγγισης.
  - $|C| = 2\,|M| \leq 2\,|C^*|$.

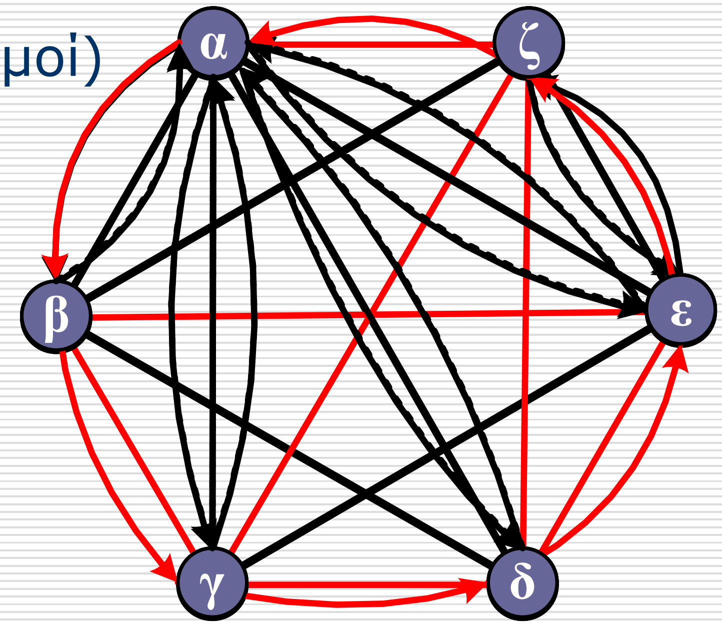
Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

- Είσοδος: *n* σημεία με (συμμετρικές) αποστάσεις τους.
  - Αποστάσεις ικανοποιούν τριγωνική ανισότητα (metric space).
- Αποδεκτές λύσεις: περιοδείες (μεταθέσεις) *n* σημείων.
- Στόχος: **περιοδεία ελάχιστου συνολικού μήκους.**



Κάτω φράγμα

- Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο (ΕΕΔ).
  - Κάθε περιοδεία έχει μήκος ≥ βάρος ΕΕΔ.
  - Περιοδεία – ακμή: επικαλύπτον δέντρο.
- Αλγόριθμος:
  - T^* ΕΕΔ βάρους $w(T^*)$
  - «Διπλασιασμός» ακμών T^* (άρτιοι βαθμοί)
  - Κύκλος Euler στο διπλασιασμένο T^*
  - Αποφυγή διπλών εμφανίσεων «κόβοντας» δρόμο.
- Μήκος $\leq 2\, w(T^*)$ λόγω τριγωνικής ανισότητας
- Λόγος προσέγγισης ≤ 2 (tight).



Καλύτερος Αλγόριθμος

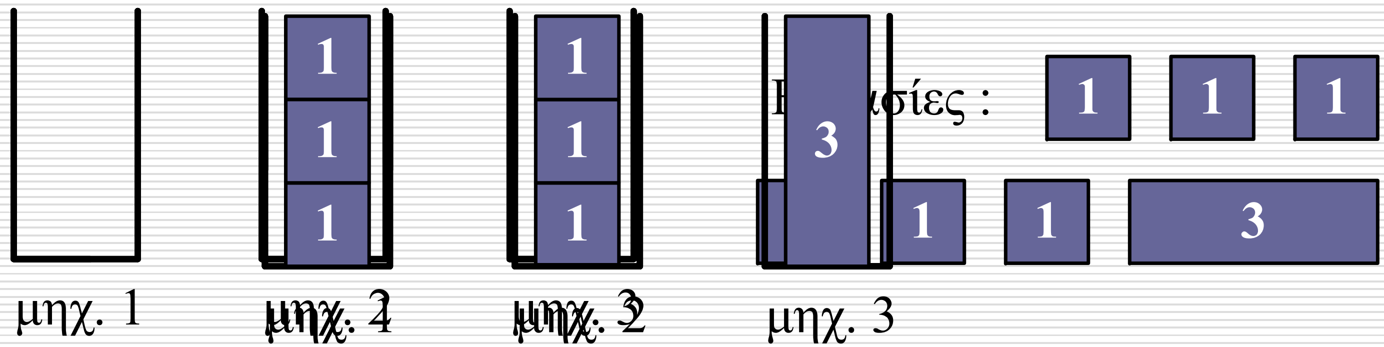
- Αλγόριθμος Χριστοφίδη (1976)
  - Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο.
  - Ταίριασμα ελάχιστου βάρους μεταξύ κορυφών ΕΕΔ με περιττό βαθμό.
  - Κύκλος Euler.
  - Περιοδεία μήκους ≤ βάρος ΕΕΔ + βάρος ταιριάσματος.
  - Λόγος προσέγγισης **= 3/2.**
- Μετά 3 χρόνια, καλύτερος γνωστός αλγόριθμος.
- Υπάρχουν καλύτεροι αλγόριθμοι για ειδικές περιπτώσεις (π.χ. TSP(1, 2), planar TSP, …).

Δρομολόγηση Εργασιών

- Είσοδος:
  - m ίδιες μηχανές (σύνολο M).
  - n εργασίες μεγέθους $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (σύνολο J).
- Αποδεκτές λύσεις: κάθε δρομολόγηση φ
- Στόχος: **ελαχιστοποίηση μέγιστου φορτίου μηχανής:**

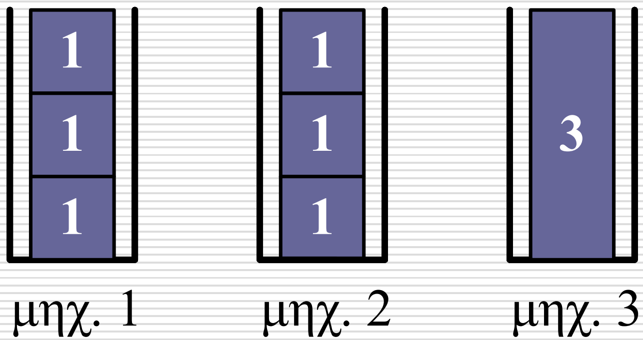
$$\forall \phi : J \mapsto M\,,\ S(\phi) = \max_{i \in M} \left\{ \sum_{j:\phi(j)=i} w_j \right\}$$

$$\phi^* = \arg\min_{\phi : J \mapsto M} \{ S(\phi) \}$$



Κάτω φράγμα

$$\left.\begin{array}{l} \square \quad S^* \geq \sum_{j=1}^{n} w_j/m = W_{\mathrm{tot}}/m \\ \square \quad S^* \geq \max_{1\leq j\leq n}\{w_j\} = w_{\max} \end{array}\right\} \Rightarrow S^* \geq \max\{W_{\mathrm{tot}}/m, w_{\max}\}$$



Αλγόριθμος Graham (1966)

- Εργασίες μία – μία με σειρά που δίνονται **(online)**.
- Νέα εργασία σε μηχανή με ελάχιστο φορτίο **(greedy)**.
- Άνω φράγμα στο μέγιστο φορτίο:
  - Φορτίο μηχανής i πριν δρομολογηθεί εργασία j : $S_j^{(i)}$
  - k μηχανή με μεγαλύτερο φορτίο
  - w_λ τελευταία εργασία στην μηχανή k

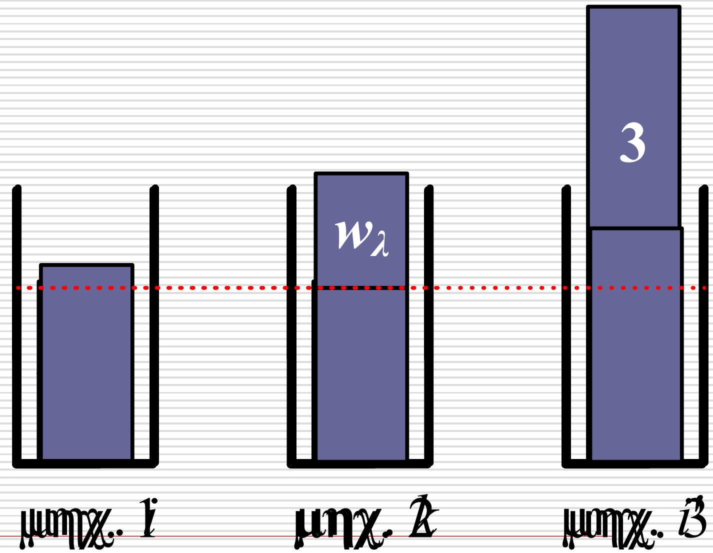
$$\forall i \in M\,,\; S_\lambda^{(k)} \le S_\lambda^{(i)}$$

$$\Rightarrow mS_\lambda^{(k)} \le \sum_{i=1}^{m} S_\lambda^{(i)} \le W_{\text{tot}} - w_\lambda$$

$$\Rightarrow S_\lambda^{(k)} \le (W_{\text{tot}} - w_\lambda)/m$$

$$S_\lambda^{(k)} + w_\lambda \le W_{\text{tot}}/m + (1 - \tfrac{1}{m})w_\lambda$$

$$\le (2 - \tfrac{1}{m})S^*$$



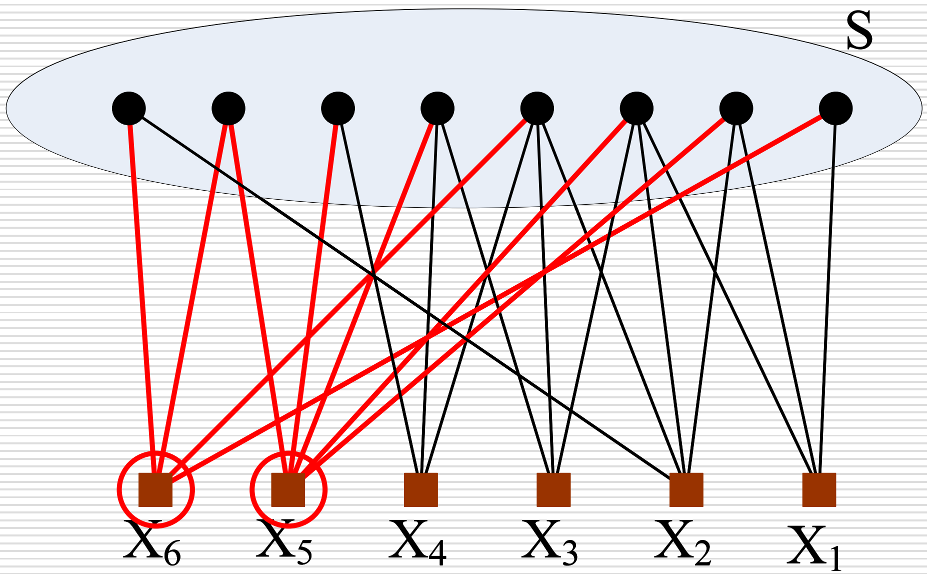
Κάλυμμα Συνόλου (Set Cover)

- Σύνολο στοιχείων $S = \{1, \ldots, n\}$
- Μη-κενά υποσύνολα του S : $X_1, \ldots, X_m$, $\bigcup_{i=1}^{m} X_i = S$
- Κόστος υποσυνόλων: $w_1, \ldots, w_m$
- Ζητούμενο: κάλυμμα *S* με ελάχιστο κόστος.
  - Ελάχιστου κόστους συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{C}$: $\bigcup_{i \in \mathcal{C}} X_i = S$

$$\begin{aligned} \min & \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_j w_j & \\ \text{s.t.} & \textstyle\sum_{j: i \in X_j} x_j \geq 1 & \forall i \in S \\ & x_j \in \{0, 1\} & \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- **NP**-δύσκολο πρόβλημα.
- **Απληστία**: καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Παράδειγμα



- S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }
- X_1 = {1, 2, 3}, X_2 = {2, 3, 4, 8}, X_3 = {3, 4, 5}
  X_4 = {4, 5, 6}, X_5 = {2, 3, 5, 6, 7}, X_6 = {1, 4, 7, 8}
- Βέλτιστη λύση: X_5 , X_6

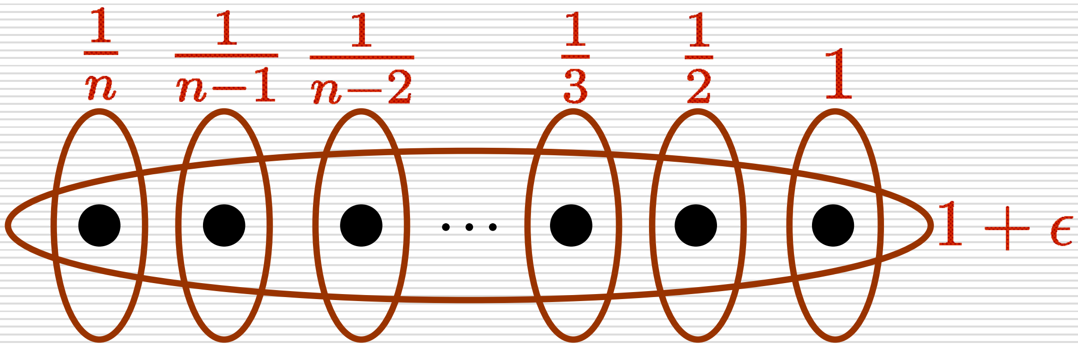
Άπληστος Αλγόριθμος

- Σύνολο U ακάλυπτων στοιχείων (αρχικά U = S).
- Επιλογή υποσυνόλου που ελαχιστοποιεί **κόστος ανά ακάλυπτο στοιχείο** που καλύπτει: $w_i / |X_i \cap U|$
- Ενημέρωση U και συνέχεια ενόσω U δεν είναι κενό.

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{greedySetCover}(S, (X_1, w_1), \ldots, (X_m, w_m)) \\
\quad U \leftarrow S; \quad \mathcal{C} \leftarrow \emptyset; \\
\quad \text{while } U \neq \emptyset \text{ do} \\
\quad\quad j \leftarrow \arg\min_{i \in [m]} \{ w_i / |X_i \cap U| \}; \\
\quad\quad \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{j\}; \quad U \leftarrow U \setminus X_j; \\
\quad \mathrm{return}(\mathcal{C}, \sum_{i \in \mathcal{C}} w_i);
\end{array}
$$

Αντιπαράδειγμα

- Δεν πλησιάζει τη βέλτιστη λύση!
  - Βέλτιστη λύση έχει κόστος 1+ε.
  - Κόστος άπληστου αλγόριθμου: $H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/n \approx \ln n$
  - Παράδειγμα: χειρότερη περίπτωση άπληστου αλγόριθμου.



Ανάλυση

- Έστω OPT κόστος βέλτιστης λύσης.
- Αρχή *i*-οστής επανάλ.: ακάλυπτα στοιχεία $n_i \leq n - i + 1$ (κάθε προηγούμενη επανάληψη καλύπτει ≥ 1 στοιχείο).
- Βέλτιστη καλύπτει στοιχεία με μέσο κόστος OPT/n_i
- Άπληστη επιλογή έχει κόστος / στοιχείο $\leq \mathrm{OPT}/n_i$
- Αθροίζοντας για ≤ *n* επαναλήψεις, κόστος άπληστου αλγ.

$$\leq \mathrm{OPT} \sum_{i=n}^{1} 1/i = \mathrm{OPT}\, H_n \approx \mathrm{OPT}\, \ln n$$

- **Λόγος προσέγγισης** $\approx \ln n$
- Αποδεικνύεται ότι **δεν** υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου με καλύτερο λόγο προσέγγισης.

Μη-Προσεγγισιμότητα

- Προβλήματα στο NP που η προσέγγιση τους είναι NP-δύσκολη!
  - Πλανοδιος Πωλητής χωρίς τριγωνική ανισότητα, μέγιστη κλίκα / σύνολο ανεξαρτησίας, χρωματικός αριθμός, …
- Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή χωρίς Τριγωνική Ανισότητα (ΠΠΠ):
  - n σημεία και συμμετρικές αποστάσεις (αλλά όχι metric).
  - Ζητούμενο: περιοδεία ελάχιστου συνολικού μήκους.
- Για κάθε γ, γ-προσέγγιση ΠΠΠ είναι **NP-δύσκολη** [Sahni και Gonzalez, 1976].
  - Κάθε γ-προσεγγιστικός αλγόριθμος για ΠΠΠ λύνει πρόβλημα κύκλου Hamilton!

Απόδειξη

- Γράφημα G(V, E): υπάρχει κύκλος Hamilton στο G;
- Αναγωγή σε γ-προσέγγιση ΠΠΠ (για οποιοδήποτε γ > 1):
  - Κορυφές ↔ σημεία.
  - Αποστάσεις: $d(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{u,v\} \in E \\ \gamma|V| & \text{αν } \{u,v\} \notin E \end{cases}$
  - Κύκλος Hamilton στο G ⇒ περιοδεία μήκους |V|
  - Όχι κύκλος Hamilton στο G ⇒
    περιοδεία μήκους ≥ γ|V| + |V| – 1 > γ|V|
- γ-προσεγγιστικός αλγόριθμος για ΠΠΠ:
  - Κύκλος Hamilton στο G ⇔ περιοδεία μήκους ≤ γ|V|
  - Αποφασίζει (σωστά) αν υπάρχει κύκλος Hamilton στο G.

Επισκόπηση Περιοχής

- **Σχήματα προσέγγισης:** λόγος $(1+\varepsilon)$, για κάθε $\varepsilon > 0$.
  - Σακίδιο, δρομολόγηση εργασιών, γεωμετρικά προβλήματα, …
  - Δυναμικός προγραμματισμός και διακριτοποίηση.
- **Σταθερός λόγος** προσέγγισης.
  - MAX-SNP-δυσκολία: NP-δύσκολο να υπάρξει σχήμα
    - PCP Θεώρημα: NP = PCP($\log n$, 1).
  - Προβλήματα σε μετρικούς χώρους: ΠΠΠ-ΤΑ, facility location, δέντρο Steiner, …
  - Προβλήματα σε γραφήματα: κάλυμμα κορυφών, μέγιστη τομή, feedback vertex set, …
  - Προβλήματα ικανοποιησιμότητας: Max-k-SAT.

Επισκόπηση Περιοχής

- Τεχνικές για σταθερό λόγο προσέγγισης:
  - Τοπική αναζήτηση – μέθοδος απληστίας.
  - Primal-dual μέθοδος.
  - Dual-fitting μέθοδος.
  - Relaxation του Ακέραιο Προγράμματος σε Γραμμικό Πρόγραμμα, επίλυση, και τυχαίο στρογγύλεμα μη-ακέραιων λύσεων.

Επισκόπηση Περιοχής

- Λογαριθμικός λόγος προσέγγισης.
  - Ελάχιστο κάλυμμα συνόλων
    - Άπληστος αλγόριθμος (dual-fitting) καλύτερος δυνατός.
  - Αραιότερη τομή, γραμμικές διατάξεις, …
  - Εμβάπτιση μετρικών χώρων σε απλούστερους χώρους όπου προβλήματα λύνονται ευκολότερα.
- Πολυωνυμικός λόγος προσέγγισης.
  - Μέγιστη κλίκα / σύνολο ανεξαρτησίας, χρωματισμός γραφημάτων, …
  - PCP Θεώρημα: για κάθε $\varepsilon > 0$, προσέγγιση μέγιστης κλίκας σε λόγο $|V|^{1-\varepsilon}$ είναι NP-δύσκολο πρόβλημα!