Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 26/1/2012

Άσκηση 1: Προβολή Ταινιών

Ο υπεύθυνος προγράμματος ενός δικτύου ψυχαγωγίας που προσφέρει video-on-demand έχει στη διάθεσή του k ταινίες $M_1, M_2, \ldots, M_k$ παρόμοιας χρονικής διάρκειας, και θέλει να επιλέξει ποιες θα είναι διαθέσιμες για προβολή στη ζώνη του Σαββάτου και ποιες στη ζώνη της Κυριακής (η διάρκεια κάθε ζώνης είναι αντίστοιχη με τη διάρκειας μιας ταινίας). Η επιλογή βασίζεται στις προτιμήσεις των n συνδρομητών του δικτύου, καθένας από τους οποίους έχει δηλώσει δύο ταινίες που θέλει να παρακολουθήσει το Σαββατοκύριακο. Ο υπεύθυνος προγράμματος πρέπει να επιλέξει δύο σύνολα ταινιών, ένα για τη ζώνη του Σαββάτου και ένα για τη ζώνη της Κυριακής, ώστε όλοι οι συνδρομητές να μπορούν να παρακολουθήσουν τις ταινίες που έχουν δηλώσει, και προσπαθεί να δρομολογήσει τις ταινίες ώστε να προβληθούν το πολύ μία φορά. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα τέτοιο πρόγραμμα προβολής, αν βέβαια υπάρχει. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 2: Μέτρηση Συντομότερων Μονοπατιών

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με μοναδιαία μήκη ακμών, και δύο κορυφές $s, t \in V$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που υπολογίζει το πλήθος των διαφορετικών συντομότερων $s - t$ μονοπατιών στο G. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 3: Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο υπό Περιορισμούς (DPV 5.24)

Θεωρούμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές, και ένα υποσύνολο επιλεγμένων κορυφών $L \subseteq V$. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα συνδετικό δέντρο του G με ελάχιστο συνολικό βάρος όπου όλες οι κορυφές του L είναι φύλλα.

(α) Να δώσετε παράδειγμα γραφήματος G και συνόλου L όπου το ελάχιστο συνδετικό δέντρο όπου οι κορυφές του L είναι φύλλα είναι διαφορετικό από το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G.

(β) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές. Είναι γνωστό (π.χ. δείτε το 6.α, στην 3η σειρά προτεινόμενων ασκήσεων) ότι αν όλες οι ακμές του G έχουν διαφορετικά βάρη, τότε το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του G είναι μοναδικό.

(α) Να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, να δώσετε παράδειγμα γραφήματος με μοναδικό ΕΣΔ, το οποίο έχει ακμές ίδιου βάρους.

(β) Να δείξετε ότι αν για κάθε τομή $(S, V \setminus S)$ του $G(V, E, w)$, η ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ είναι μοναδική, τότε το G έχει μοναδικό ΕΣΔ. Όπως και στο (α), να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

(γ) Να διατυπώσετε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη μοναδικότητα του ΕΣΔ σε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ (και να αποδείξετε ότι η συνθήκη που διατυπώσατε είναι πράγματι ικανή και αναγκαία).

(δ) Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρονική πολυπλοκότητα $\mathrm{O}(|V|^2)$ που ελέγχει κατά πόσο ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ έχει μοναδικό ΕΣΔ. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Θα υπάρχει επιπλέον βαθμολογία (bonus) για απαντήσεις με χρονική πολυπλοκότητα $\mathrm{O}(|E| \log |E|)$.

Άσκηση 5: Υπολογισμός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου με Διαγραφή Ακμών

Σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές, και θα διατυπώσουμε αλγόριθμο που υπολογίζει ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του G με διαδοχική διαγραφή κατάλληλα επιλεγμένων ακμών.

(α) Έστω C ένας κύκλος του G, και έστω e μια ακμή μέγιστου βάρους του C. Να δείξετε ότι υπάρχει ΕΣΔ του G που δεν περιέχει την e.

(β) Θεωρούμε τον αλγόριθμο που εξετάζει διαδοχικά τις ακμές του G σε φθίνουσα σειρά βάρους, και σε κάθε επανάληψη, διαγράφει την εξεταζόμενη ακμή e αν αυτή ανήκει σε κύκλο (ο οποίος σχηματίζεται από την e και ακμές που δεν έχουν ακόμη διαγραφεί). Να αποδείξετε την ορθότητα αυτού του αλγόριθμου. Να δείξετε δηλαδή (i) ότι ο αλγόριθμος πράγματι υπολογίζει ένα συνδετικό δέντρο του G, και (ii) ότι αυτό έχει πράγματι ελάχιστο συνολικό βάρος.

(γ) Να προτείνετε μια αποδοτική υλοποίηση του αλγόριθμου του (β). Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα της υλοποίησή σας και γιατί;