Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 16/2/2012

Άσκηση 1: Παιχνίδι Επιλογής Ακμών σε Κατευθυνόμενο Ακυκλικό Γράφημα

Θεωρούμε το παρακάτω παιχνίδι επιλογής ακμών με 2 παίκτες, τον A και τον B, που λαμβάνει χώρα σε ένα Κατευθυνόμενο Ακυκλικό Γράφημα (DAG) G, με αρχική κορυφή s. Πρώτα ο παίκτης A επιλέγει μια ακμή από την s προς κάποια κορυφή v_1. Στη συνέχεια, ο παίκτης B επιλέγει μια ακμή από την v_1 προς κάποια κορυφή v_2. Έπειτα, ο παίκτης A επιλέγει μια ακμή από την v_2 προς κάποια κορυφή v_3, κοκ. Το παιχνίδι ολοκληρώνεται όταν φτάσουμε σε μία κορυφή u χωρίς εξερχόμενες ακμές, οπότε ο παίκτης που έχει σειρά να επιλέξει εξερχόμενη ακμή από την u χάνει (γιατί δεν έχει καμία επιλογή). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με δεδομένα ένα DAG G και μια αρχική κορυφή s, αποφασίζει αν υπάρχει στρατηγική του παίκτη A που εγγυάται ότι αυτός κερδίζει το παιχνίδι, ανεξάρτητα από τη στρατηγική του παίκτη B. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 2: Σχεδιασμός Ταξιδιού (DPV 4.13)

Το οδικό δίκτυο μιας χώρας αναπαρίσταται από ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με m ακμές. Κάθε οδική αρτηρία $e \in E$ συνδέει δύο πόλεις και έχει μήκος $w(e)$ χιλιόμετρα, ενώ σταθμοί καυσίμων υπάρχουν σε κάθε πόλη / κορυφή του γραφήματος, αλλά όχι στις οδικές αρτηρίες / ακμές μεταξύ τους. Θέλουμε να ταξιδεύσουμε από μια πόλη s σε μια πόλη t χρησιμοποιώντας αυτοκίνητο που διαθέτει αυτονομία καυσίμου για L χιλιόμετρα.
(α) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό. Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;
(β) Να διατυπώσετε έναν όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει την ελάχιστη αυτονομία καυσίμου (σε χιλιόμετρα) που απαιτείται για το ταξίδι από την s στην t.

Άσκηση 3: Διαχωρισμός Γραφήματος

Έστω συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, όπου κάθε ακμή e έχει βάρος $w(e) > 0$. Για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, θεωρούμε την απόσταση $d(u, v)$ μεταξύ των u και v στο G (οι αποστάσεις υπολογίζονται με βάση τα βάρη w των ακμών).
(α) Έστω T ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G. Να δείξετε ότι για κάθε ακμή $e = \{u, v\} \in T$, $d(u, v) = w(e)$ (δηλ. η e αποτελεί ένα συντομότερο $u - v$ μονοπάτι).
(β) Για κάθε διαμέριση του V σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2, ορίζουμε ως απόσταση $d(S_1, S_2)$ την ελάχιστη απόσταση μεταξύ μιας κορυφής του S_1 και μιας κορυφής του S_2, δηλ. $d(S_1, S_2) = \min_{u \in S_1, v \in S_2} d(u, v)$. Να διατυπώσετε έναν όσο το δυνατόν πιο αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια διαμέριση του V σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2, η οποία μεγιστοποιεί την μεταξύ τους απόσταση $d(S_1, S_2)$. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Υπόδειξη:* Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσετε τις αποστάσεις ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη κορυφών του G!

Άσκηση 4: Παιχνίδια Εξουσίας

Η μακρινή Χώρα των Αλγορίθμων έχει n ιππότες και m κάστρα. Ο Βασιλιάς της θέλει να θέσει κάθε κάστρο υπό την εποπτεία ενός ιππότη. Κάθε ιππότης i μπορεί να έχει υπό την εποπτεία του το πολύ c_i κάστρα, ώστε να μην μπορεί να απειλήσει τον Βασιλιά, ενώ τα στρατεύματα που σταθμεύουν σε κάθε κάστρο j έχουν παραδώσει στον Βασιλιά μια λίστα K_j με τους ιππότες υπό των οποίων την εποπτεία δέχονται να τεθούν. Ο Βασιλιάς αναθέτει στον Πρωθυπουργό του τον υπολογισμό μιας ανάθεσης των κάστρων στους ιππότες, σύμφωνα με τους παραπάνω περιορισμούς.

(α) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Αν δεν υπάρχει ανάθεση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς, ο αλγόριθμός σας πρέπει να το διαπιστώνει. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Ο Πρωθυπουργός εκτελεί τον αλγόριθμο του (α), και διαπιστώνει ότι δεν υπάρχει ανάθεση που ικανοποιεί τους περιορισμούς. Όμως ο Βασιλιάς είναι δύσπιστος, και φαντάζεται ότι ο αλγόριθμος μπορεί να μην εκτελέστηκε σωστά. Θέλει λοιπόν ο Πρωθυπουργός να του αποδείξει ότι έχει δίκιο με τον πιο απλό και πειστικό τρόπο. Ποιο επιχείρημα (βασισμένο στο στιγμιότυπο εισόδου και στο αποτέλεσμα του αλγόριθμου) του προτείνετε να χρησιμοποιήσει για να πείσει τον Βασιλιά;

(γ) Εν τω μεταξύ, ο Βασιλιάς έχει αρχίσει να ανησυχεί για κάποιες συγκρούσεις μεταξύ των ιπποτών. Φτιάχνει λοιπόν μια λίστα με όλα τα ζεύγη ιπποτών που συγκρούονται μεταξύ τους, και προσπαθεί να βρει ένα ελάχιστου πλήθους σύνολο ιπποτών που αν εξοριστούν, οι συγκρούσεις θα σταματήσουν. Θα μπορούσε κάποιος να προτείνει στον Βασιλιά έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα;

Άσκηση 5: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-Πλήρη:

Πυκνό Γράφημα (Dense Subgraph) (DPV 8.10.δ)
Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικοί αριθμοί k και b.
Ερώτηση: Υπάρχει σύνολο $S \subseteq V$ με k κορυφές, ώστε οι κορυφές του S να έχουν στο G τουλάχιστον b ακμές μεταξύ τους;

Μακρύ Μονοπάτι
Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$.
Ερώτηση: Υπάρχει στο G μονοπάτι με μήκος τουλάχιστον $|V|/2$;

Σύνολο Κορυφών Ανάδρασης - Κατευθυνόμενο Γράφημα (Feedback Vertex Set - Directed)
Είσοδος: Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός k.
Ερώτηση: Υπάρχει στο G σύνολο κορυφών ανάδρασης $S \subseteq V$ με k ή λιγότερες κορυφές;
Ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ ονομάζεται *σύνολο κορυφών ανάδρασης* (feedback vertex set) αν το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση των κορυφών του S (και όλων των ακμών που προσπίπτουν σε κάποια από αυτές) δεν έχει κύκλο.

Σύνολο Κορυφών Ανάδρασης - Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα (Feedback Vertex Set - Undirected)
Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός k.
Ερώτηση: Υπάρχει στο G σύνολο κορυφών ανάδρασης $S \subseteq V$ με k ή λιγότερες κορυφές;