



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 9/1/2012

Άσκηση 1: Τηλεμεταφορά

Επιστήμονες ανακαλύπτουν έναν ερημωμένο πλανήτη στον οποίον μοιάζει να κατοικούσαν κάποτε κάποιοι μικροσκοπικοί, αλλά τεχνολογικά προηγμένοι, εξωγήινοι. Στον πλανήτη αυτόν είναι εγκατεστημένο ένα δίκτυο συσκευών που επιτρέπουν την τηλεμεταφορά ύλης. Ειδικότερα, υπάρχουν m όμοιοι θάλαμοι σε διάφορα σημεία του πλανήτη, αριθμημένοι $1, 2, \dots, m$. Σε κάποια άλλη τοποθεσία, υπάρχει ένας μακρόστενος κλειστός (χωρίς διεξόδους) διάδρομος, νοητά διαχωρισμένος κατά μήκος σε m ίσες περιοχές, που διαδοχικά αριθμούνται $1, 2, \dots, m$. Κάθε περιοχή έχει τις ίδιες ακριβώς διαστάσεις με κάθε θάλαμο. Τέλος, υπάρχει ένα κέντρο ελέγχου, όπου βρίσκεται το κουμπί ενεργοποίησης του συστήματος. Με κάθε ενεργοποίηση του συστήματος, γίνεται ανταλλαγή της ύλης που βρίσκεται στον i -οστό θάλαμο και στην i -οστή περιοχή του διαδρόμου, ταυτόχρονα για κάθε θάλαμο και κάθε περιοχή.

Οι επιστήμονες θέλουν να χρησιμοποιήσουν αυτό το σύστημα για να μετακινούνται πάνω στον πλανήτη. Δυστυχώς όμως, στον διάδρομο χωράει το πολύ ένας άνθρωπος κατά πλάτος και ύψος. Δεν χωρούν λοιπόν στο διάδρομο δύο άνθρωποι πλάι-πλάι, και επομένως, δεν μπορεί ένας άνθρωπος να προσπεράσει κάποιον άλλον εντός του διαδρόμου. Επιπλέον, όπως είναι φυσικό για τέτοια συστήματα, με κάθε ενεργοποίηση καταναλώνονται τεράστια ποσά ενέργειας.

Σας ζητούν λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το μέγιστο πλήθος επιστημόνων που μπορούν να μετακινηθούν στους επιθυμητούς τους προορισμούς με δύο διαδοχικές ενεργοποιήσεις του συστήματος, αν ο διάδρομος είναι αρχικά άδειος. Θεωρήστε ότι το μήκος κάθε θαλάμου (άρα και κάθε περιοχής του διαδρόμου) είναι αρκετό για να χωρέσει, κατά μήκος, όλους τους επιστήμονες που θέλουν να τον χρησιμοποιήσουν. Λάβετε ακόμη υπόψη σας ότι, λόγω των περιορισμένων διαστάσεων του διαδρόμου, αν π.χ. κάποιος επιστήμονας θέλει να μετακινηθεί από τον θάλαμο 1 στον θάλαμο 4, και κάποιος άλλος από τον θάλαμο 2 στον θάλαμο 3, αυτό δεν μπορεί να γίνει με δύο μόνο ενεργοποιήσεις, αφού αυτοί δεν μπορούν να μετακινηθούν ταυτόχρονα μεταξύ των περιοχών 1 και 4 και 2 και 3 του διαδρόμου.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input έναν θετικό ακέραιο αριθμό που αντιστοιχεί στο πλήθος N των επιστημόνων. Σε κάθε μία από τις επόμενες N γραμμές, το πρόγραμμα θα διαβάζει δύο διαφορετικούς ακέραιους A_i και B_i , χωρισμένους με κενό. Ο αριθμός A_i αντιστοιχεί στον θάλαμο που επιθυμεί να χρησιμοποιήσει ο i -οστός επιστήμονας ως αφετηρία, ενώ ο B_i αντιστοιχεί στον θάλαμο στον οποίο επιθυμεί να μεταφερθεί ο i -οστός επιστήμονας.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) το μέγιστο πλήθος επιστημόνων που μπορούν να μεταφερθούν στους επιθυμητούς τους προορισμούς με δύο διαδοχικές ενεργοποιήσεις του συστήματος, αν ο διάδρομος είναι αρχικά άδειος.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$1 \leq N \leq 500000$	5	4
$1 \leq A_i, B_i \leq 10^7$	5 15	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	8 17	
Όριο μνήμης: 64 MB.	11 17	
	5 3	
	7 2	

Άσκηση 2: Χριστουγεννιάτικες Αγορές

Δύο φιλικές οικογένειες ετοιμάζονται πυρετωδώς για το μεγάλο Χριστουγεννιάτικο πάρτυ που κάνουν κάθε χρόνο. Οι δύο κυρίες είναι στο σπίτι απασχολημένες με τη διακόσμηση, και οι δύο κύριοι αναλαμβάνουν τα ψώνια. Οι κυρίες έχουν προετοιμάσει προσεκτικά μια λίστα με N καταστήματα, τα οποία οι κύριοι πρέπει να επισκεφθούν για να προμηθευτούν όλα τα απαραίτητα. Η λίστα των καταστημάτων είναι σε αύξουσα σειρά ως προς το βάρος των αντικειμένων που θα αγοραστούν από το καθένα, και έχει τις συντεταγμένες τους $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$, με βάση τις παράλληλες και τις κάθετες οδούς της πόλης. Για να τελειώσουν γρήγορα και ξεκούραστα, οι κύριοι αποφασίζουν να μοιράσουν τα καταστήματα μεταξύ τους, κάποια (θα μπορούσε και κανένα) να τα επισκεφθεί μόνον ο ένας και τα υπόλοιπα μόνον ο άλλος, και να ακολουθήσουν τη σειρά της λίστας, ώστε να κουβαλήσουν τα βαριά αντικείμενα για όσο το δυνατόν λιγότερο.

Οι δύο κύριοι γνωρίζουν ότι ο χρόνος μετάβασης από ένα κατάστημα i σε ένα άλλο κατάστημα j καθορίζεται από την Manhattan απόσταση $d(i, j) = |X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ των αντίστοιχων σημείων στην πόλη. Επειδή φέτος τα Χριστούγεννα κάνει πολύ κρύο, οι κύριοι θέλουν να ελαχιστοποιήσουν τον συνολικό χρόνο που θα παραμείνουν εκτεθειμένοι στον παγωμένο αέρα. Θέλουν λοιπόν να μοιράσουν τα καταστήματα μεταξύ τους ώστε να ελαχιστοποιήσουν τον συνολικό χρόνο μετακίνησης μεταξύ των καταστημάτων, με δεδομένο βέβαια ότι ο καθένας θα επισκεφθεί τα καταστήματα που θα αναλάβει με τη σειρά τους στη λίστα. Για να κάνουν τους υπολογισμούς τους, θεωρούν ότι θα ξεκινήσουν από τα γραφεία τους, που βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία, και δεν λαμβάνουν υπόψη το χρόνο μετάβασης από το τελευταίο κατάστημα που θα επισκεφθεί ο καθένας στο σημείο όπου θα γίνει το πάρτυ. Να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει τον ελάχιστο συνολικό χρόνο μετακίνησης που χρειάζονται οι δύο κύριοι για τις Χριστουγεννιάτικες αγορές τους.

Για παράδειγμα, έστω ότι τα γραφεία των δύο κυριών είναι στα σημεία $(1, 1)$ και $(4, 1)$ αντίστοιχα, και έστω ότι η λίστα περιλαμβάνει 4 καταστήματα στα σημεία $(3, 1)$, $(6, 1)$, $(3, 5)$, και $(6, 5)$, με αυτή τη σειρά. Τότε ο ελάχιστος συνολικός χρόνος μετακίνησης είναι 11, και επιτυγχάνεται αν ο πρώτος επισκεφθεί τα καταστήματα $(3, 1)$, $(3, 5)$, και $(6, 5)$ (χρόνος μετακίνησης $2+4+3 = 9$) και ο δεύτερος επισκεφθεί το κατάστημα $(6, 5)$ (χρόνος μετακίνησης 2).

Λεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από τα standard input τρεις θετικούς ακέραιους που αντιστοιχούν στο πλήθος N των καταστημάτων που πρέπει οι κύριοι να επισκεφθούν, στο πλήθος R των παράλληλων οδών της πόλης, και στο πλήθος C των κάθετων οδών της πόλης. Σε κάθε μία από τις επόμενες $N + 2$ γραμμές, το πρόγραμμα θα διαβάζει δύο θετικούς ακέραιους X_i και Y_i , χωρισμένους με κενό, με το X_i να αντιστοιχεί σε κάποια παράλληλη οδό και το Y_i σε κάποια κάθετη οδό, ώστε το ζεύγος (X_i, Y_i) να ορίζει ένα σημείο στην πόλη. Τα πρώτα δύο σημεία (X_1, Y_1) και (X_2, Y_2) προσδιορίζουν τις θέσεις των γραφείων των δύο κυριών, και τα υπόλοιπα N σημεία $(X_3, Y_3), \dots, (X_{N+2}, Y_{N+2})$ τις θέσεις των N καταστημάτων (μπορεί κάποια καταστήματα να έχουν τις ίδιες συντεταγμένες. Και σε αυτή την περίπτωση, η σειρά των καταστημάτων οφείλει να τηρηθεί).

Λεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) τον ελάχιστο συνολικό χρόνο μετακίνησης που χρειάζονται οι δύο κύριοι για τις Χριστουγεννιάτικες αγορές τους, με δεδομένο ότι ο καθένας θα επισκεφθεί τα καταστήματα που θα αναλάβει με τη σειρά που αυτά εμφανίζονται στη λίστα.

Περιορισμοί:

$$1 \leq N \leq 100000$$

$$1 \leq R, C \leq 10$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Θα υπάρχουν, ως bonus, δύο επιπλέον

παραδείγματα αξιολόγησης: ένα με

$$R = C = 10^2 \text{ και ένα με } R = C = 10^3.$$

Παράδειγμα Εισόδου:

4 6 5

1 1

4 1

3 1

6 1

3 5

6 5

Παράδειγμα Εξόδου:

11