



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/ρία Παράδοσης 18/2/2012

Άσκηση 1: Φορολογικός Έλεγχος

Η εφορία αποφάσισε να κάνει αφηνδιαστικό έλεγχο σε όλες τις επιχειρήσεις της πόλης Königsberg. Για να οργανωθούν καλύτερα οι έλεγχοι και να ελαχιστοποιηθεί το κόστος, η εφορία θα μισθώσει ένα λεωφορείο που θα μεταφέρει τους ελεγκτές. Το λεωφορείο πρέπει να περάσει από όλους τους δρόμους της πόλης (όπου ως δρόμος νοείται το τμήμα μιας οδού μεταξύ δύο διαδοχικών διασταυρώσεων). Σε κάθε δρόμο, θα αποβιβάσει έναν ελεγκτή, που θα αναλάβει όλες τις επιχειρήσεις που βρίσκονται εκεί. Ανάλογα με το μήκος, τις κυκλοφοριακές συνθήκες, και άλλους παράγοντες, ο ιδιοκτήτης χρεώνει ένα ποσό για κάθε διέλευση του λεωφορείου από κάθε δρόμο.

Ο έφορος ζήτησε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το ελάχιστο κόστος μίσθωσης για να κάνει το λεωφορείο μια κυκλική διαδρομή που διέρχεται από κάθε δρόμο της πόλης τουλάχιστον μία φορά. Ανέφερε μάλιστα ότι όλοι οι δρόμοι είναι διπλής κατεύθυνσης και ότι σε όλες διασταυρώσεις του Königsberg, εκτός από δύο, συναντάται άρτιο πλήθος δρόμων.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input το γράφημα που αντιστοιχεί στο οδικό δίκτυο μιας πόλης με τα χαρακτηριστικά του Königsberg. Κάθε διασταύρωση αντιστοιχεί σε μία κορυφή του γραφήματος και κάθε δρόμος σε μία ακμή που συνδέει δύο κορυφές. Το γράφημα θα έχει N κορυφές / διασταυρώσεις που αριθμούνται από 1 μέχρι N , και M ακμές / δρόμους. Το γράφημα θα είναι συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο, μπορεί να έχει παράλληλες ακμές, και όλες οι κορυφές του, εκτός από δύο, θα έχουν άρτιο βαθμό.

Όσον αφορά στην μορφή της εισόδου, στην πρώτη γραμμή θα δίνεται το πλήθος των κορυφών / διασταυρώσεων N και το πλήθος των ακμών / δρόμων M . Σε καθεμία από τις υπόλοιπες M γραμμές θα δίνονται, χωρισμένα με ένα κενό, τα στοιχεία μιας ακμής e , δηλ. οι δυο κορυφές που συνδέονται από την e και το ποσό $c(e)$ που χρεώνει ο ιδιοκτήτης του λεωφορείου για κάθε διέλευση από αυτή.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος μίσθωσης για να κάνει το λεωφορείο μια κυκλική διαδρομή που διέρχεται από κάθε ακμή του γραφήματος τουλάχιστον μία φορά. Παρατηρείστε ότι λόγω των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της πόλης, είναι δυνατόν να υπολογιστεί το ελάχιστο κόστος μίσθωσης χωρίς ενδεχομένως να υπολογιστεί μια κυκλική διαδρομή που το επιτυγχάνει.

| Περιορισμοί: | Παράδειγμα Εισόδου: | Παράδειγμα Εξόδου: |
|------------------------------|---------------------|--------------------|
| $1 \leq N \leq 60000$ | 4 5 | 17 |
| $1 \leq M \leq 1001000$ | 1 2 4 | |
| $1 \leq c(e) \leq 20000$ | 1 3 1 | |
| Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1sec. | 1 4 2 | |
| Όριο μνήμης: 64MB. | 2 4 3 | |
| | 3 4 5 | |

Άσκηση 2: Κύπελλο Ποδοσφαίρου

Στην εξωτική Παραγκούπολη, οι αγώνες του κυπέλλου ποδοσφαίρου λαμβάνουν χώρα ακολουθιακά, ο ένας μετά τον άλλο (και όχι σε γύρους, όπως συνήθως). Αρχικά, έχουμε N ομάδες που συμμετέχουν στην διοργάνωση, και μετά από κάθε αγώνα, η ηττημένη ομάδα βγαίνει εκτός διοργάνωσης, ενώ η νικήτρια παραμένει (δεν υπάρχουν ισοπαλίες). Η διοργάνωση ολοκληρώνεται όταν έχει μείνει μόνο μία ομάδα, η οποία κερδίζει το κύπελλο. Έχετε αναλάβει να καθορίσετε την ακολουθία των αγώνων επιλέγοντας ημερομηνίες και αντιπάλους.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται μόνο από τις επιδόσεις και την προετοιμασία των ομάδων, αλλά και από την “τύχη”, δηλαδή το πρόγραμμα των αγώνων. Κι εσείς το γνωρίζετε πολύ καλά αυτό. Έχετε περάσει αρκετό καιρό βλέποντας προσεκτικά τις επιδόσεις κάθε ομάδας. Είναι πλέον προφανές ότι τα αποτελέσματα κάποιων αγώνων είναι 100% προβλέψιμα. Έχοντας αυτές τις πληροφορίες, θέλετε να δείτε αν μπορείτε να οργανώσετε το πρόγραμμα των αγώνων με τρόπο ώστε μια ομάδα X να κερδίσει το κύπελλο. Θέλετε δηλαδή να οργανώσετε τους αγώνες έτσι ώστε η ομάδα X να παίξει μόνο με αντιπάλους που σίγουρα θα κερδίσει (ώστε τελικά να κερδίσει το κύπελλο). Αν αυτό είναι δυνατό, λέμε ότι το κύπελλο μπορεί να “στηθεί” για λογαριασμό της ομάδας X . Θέλετε λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει για ποιες ομάδες μπορεί να “στηθεί” το κύπελλο.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input ένα κατευθυνόμενο γράφημα που αναπαριστά τα ζεύγη των ομάδων για τις οποίες το μεταξύ τους αποτέλεσμα είναι 100% προβλέψιμο. Στην πρώτη γραμμή, θα δίνεται το πλήθος N των ομάδων, και θα ακολουθούν N γραμμές. Στην i -οστή γραμμή, ο πρώτος αριθμός d_i θα δηλώνει από πόσες ομάδες χάνει σίγουρα η ομάδα i (μπορεί να είναι 0), και θα ακολουθούν d_i αριθμοί, που θα δηλώνουν ποιες είναι αυτές οι ομάδες. Π.χ. στο παράδειγμα, έχουμε 5 ομάδες, η 1η χάνει από μία ομάδα, την 5, η 2η χάνει από τρεις ομάδες, τις 1, 4, και 5, η 3η χάνει από δύο ομάδες, τις 1 και 4, η 4η χάνει από μία ομάδα, την 1, και η 5η χάνει από μία ομάδα, την 3.

Παρατηρήσεις: Τα δεδομένα για τη σχέση των αποτελεσμάτων που είναι προβλέψιμα θα περιγράφουν μια σχέση που είναι αντισυμμετρική και δεν είναι κατ’ ανάγκη ούτε πλήρης ούτε μεταβατική. Δηλαδή, όσον αφορά στην αντισυμμετρικότητα, αν υπάρχει μια ομάδα a χάνει από μια ομάδα b , η b δεν θα χάνει από την a . Όσον αφορά στην πληρότητα, μπορεί να υπάρχουν ζευγάρια ομάδων για την οποία δεν γνωρίζουμε με σιγουριά ποια χάνει από την άλλη. Όσον αφορά στην μεταβατικότητα, μπορεί να γνωρίζουμε ότι μια ομάδα a χάνει από μια ομάδα b , και ότι η b χάνει από μια ομάδα c , και να μην γνωρίζουμε με σιγουριά αν η a χάνει από την c (ή μπορεί ακόμη και να γνωρίζουμε ότι η c χάνει από την a).

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο πλήθος των ομάδων για τις οποίες μπορεί να “στηθεί” η διοργάνωση του κυπέλλου.

| Περιορισμοί: | Παράδειγμα Εισόδου: | Παράδειγμα Εξόδου: |
|-------------------------------|---------------------|--------------------|
| $3 \leq N \leq 30000$ | 5 | 4 |
| $3 \leq M \leq 10^6$ | 1 5 | |
| Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. | 3 1 4 5 | |
| Όριο μνήμης: 64 MB. | 2 1 4 | |
| | 1 1 | |
| | 1 3 | |