Επιλογή

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πρόβλημα Επιλογής

- Πίνακας A[ ] με n στοιχεία (όχι ταξινομημένος). Αριθμός k, $1 \leq k \leq n$.
- Υπολογισμός του k-οστού μικρότερου στοιχείου (στοιχείο θέσης A[k] αν A ταξινομημένος).
  - $k = 1$: ελάχιστο. $k = n$: μέγιστο.
    $k = n / 2$: ενδιάμεσο (median).

5	3	2	6	4	1	3	7

Ελάχιστο : **1**

Μέγιστο : **7**

Ενδιάμεσο : **3**

Εφαρμογές

- Υπολογισμός στατιστικού ενδιάμεσου (median).
  - Χρήσιμες πληροφορίες για κατανομή.
  - Ανήκει η Ελλάδα στο φτωχότερο 25% των χωρών ΕΕ;
  - Ανήκει κάποιος φοιτητής στο καλύτερο 10% του έτους του;
- Ισομερής διαίρεση (partition) πίνακα σε ομάδες «ταξινομημένες» μεταξύ τους.
- Ενδιαφέρον αλγοριθμικό πρόβλημα!

Μέγιστο / Ελάχιστο

- Μέγιστο (ελάχιστο) εύκολα σε χρόνο Θ(n), με n – 1 συγκρίσεις μεταξύ στοιχείων.

```
int maximum(int A[], int n) {
    int max = A[0], i;
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (A[i] > max) max = A[i];
    return(max);    }
```

- Μέγιστο και ελάχιστο με $3\lfloor n/2 \rfloor$ συγκρίσεις ! **Πώς;**

Κάτω Φράγμα για Μέγιστο

- Κάθε ντετερμινιστικός συγκριτικός αλγόριθμος χρειάζεται $\geq n - 1$ συγκρίσεις για μέγιστο (ελάχιστο).
  - «Πρωτάθλημα» μεταξύ στοιχείων.
  - Σύγκριση στοιχείων : αγώνας όπου κερδίζει μεγαλύτερο.
  - Κάθε «αήττητο» στοιχείο είναι υποψήφιο μέγιστο.
  - Για μοναδικό μέγιστο, πρέπει τα υπόλοιπα να «ηττηθούν».
  - Κάθε αγώνας δίνει ένα «ηττημένο» στοιχείο
  - $\geq n - 1$ αγώνες / συγκρίσεις για μοναδικό μέγιστο.

Επιλογή

- Σε χρόνο $O(n \log n)$ με ταξινόμηση.
- Μέγιστο ($k = 1$), ελάχιστο ($k = n$) : χρόνος $\Theta(n)$.
- Άλλες τιμές k : χρόνος $O(n \log n)$ ή $O(n)$;
- Επιλογή σε γραμμικό χρόνο με διαίρει-και-βασίλευε βασισμένη σε διαχωρισμό της quicksort !

Πιθανοτική Quickselect

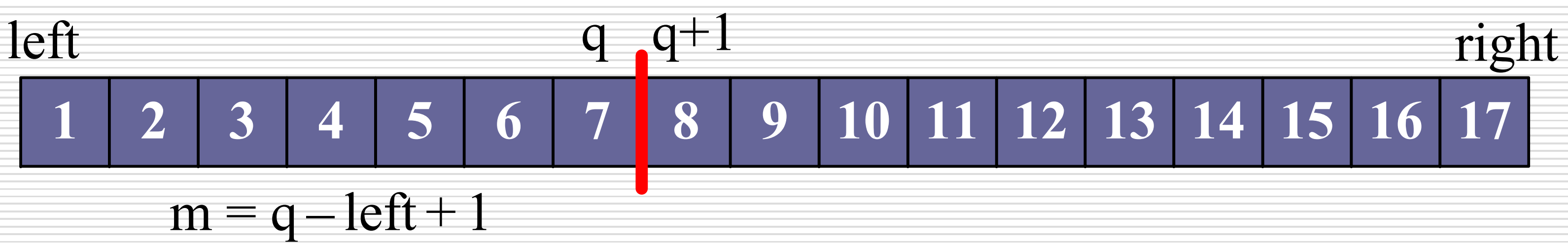
- Έστω υπο-πίνακας A[*l*…*r*] και αναζητούμε k-οστό στοιχείο.
- **Τυχαίο** στοιχείο διαχωρισμού (pivot).
- Αναδιάταξη και διαίρεση εισόδου σε δύο υπο-ακολουθίες:
  - Στοιχεία αριστερής [*l*…*q*] υπο-ακολ. ≤ στοιχείο διαχωρισμού.
  - Στοιχεία δεξιάς [*q*+1…*r*] υπο-ακολ. ≥ στοιχείο διαχωρισμού.
- Αν $k \leq q-l+1$, αναδρομική λύση (A[*l*…*q*], *k*)
  Αν $k > q-l+1$, αναδρομική λύση (A[*q*+1…*r*], *k*−(*q*−*l*+1))

6	2	9	5	11	8	7	4	13	19	12	21

$k = 6$

Ορθότητα Quickselect

- Τερματισμός : μέγεθος υπο-ακολουθιών $\leq n - 1$.
- Επαγωγικά υποθέτω ότι $1 \leq k \leq right - left + 1$.
  - Πλήθος στοιχείων στα αριστερά: $m = q - left + 1$.
  - Αν $k \leq m$, δεξιά στοιχεία «αποκλείονται».
  - Αν $m < k$, αριστερά στοιχεία «αποκλείονται» και k μειώνεται αντίστοιχα ($k' = k - m$).



Πιθανοτική Quickselect

```
int RQuickSelect(int A[], int left, int right, int k)
{
    if (left == right) return(A[left]); // 1 στοιχείο

    pivot = random(left, right); // τυχαίο pivot
    swap(A[left], A[pivot]);

    q = partition(A, left, right); // διαίρεση
    nel = q - left + 1; // #στοιχείων στο αριστερό μέρος

    if (k <= nel) return(RQuickSelect(A, left, q, k));
    else return(RQuickSelect(A, q+1, right, k - nel));
}
```

Χρόνος Εκτέλεσης (χ.π.)

- Χρόνος εκτελ. αναδρομικών αλγ. με διατύπωση και λύση αναδρομικής εξίσωσης λειτουργίας.
- ***T*(*n*)** : χρόνος (χ.π.) για επιλογή από *n* στοιχεία.
- Χρόνος εκτέλεσης **partition**(*n* στοιχεία) : Θ(*n*)
- Χειρότερη περίπτωση : ένα στοιχείο «αποκλείεται» σε κάθε διαίρεση!

$$T(n) = \Theta(n) + T(n-1)\,,\quad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n-1) + \Theta(n-2) + \cdots + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

- Πιθανοτικός αλγ.: χειρότερη περίπτωση έχει εξαιρετικά μικρή πιθανότητα να συμβεί (για κάθε είσοδο) !

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- **Καλή περίπτωση** : διαίρεση (n / 4, 3n / 4) ή καλύτερη.
  - Τουλάχιστον n / 4 στοιχεία «αποκλείονται».
- Πιθανότητα «καλής περίπτωσης» ≥ **1/2** !
  - Κατά «μέσο όρο», μία «κακή διαίρεση» πριν από «καλή διαίρεση» που μειώνει στοιχεία από n σε ≤ 3n /4.

$$S(n) = \Theta(n) + S(3n/4)$$

- Λύση αναδρομής: $S(n) = \Theta(n)$
  - Γεωμετρική σειρά :

$$S(n) \le cn + \tfrac{3}{4}cn + (\tfrac{3}{4})^2 cn + (\tfrac{3}{4})^3 cn + \cdots + c = \Theta(n)$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Χρόνος Εκτέλεσης (μ.π.)

- Τυχαίο στοιχείο σαν στοιχείο χωρισμού (pivot).
- Για κάθε $i \in [n-1]$,
  πιθανότητα διαίρεσης (i, n – i) = $\dfrac{1}{n-1}$

$$S(n) = \Theta(n) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} S(\max\{i, n-i\})$$

$$= \Theta(n) + \frac{2}{n-1}\sum_{i=n/2}^{n-1} S(i)$$

- Λύση αναδρομής : $S(n) = \Theta(n)$

Ντετερμινιστική Επιλογή

- «Καλή διαίρεση» ντετερμινιστικά:
  - Χρήση pivot **κοντά** στο ενδιάμεσο: πρόβλημα επιλογής!
  - Φαύλος κύκλος : γρήγορη επιλογή → καλή διαίρεση → γρήγορη επιλογή.
- Προσεγγιστική επιλογή : όχι «ενδιάμεσο» αλλά «κοντά στο ενδιάμεσο» για pivot.
  - Επιλογή **κατάλληλου** δείγματος (π.χ. n / 5 στοιχεία).
  - Ενδιάμεσο δείγματος είναι «κοντά στο ενδιάμεσο» για σύνολο στοιχείων.
  - Αναδρομικά ενδιάμεσο στοιχείο του δείγματος.
  - Ενδιάμεσο δείγματος για pivot εγγυάται «καλή διαίρεση».

Ντετερμινιστική Επιλογή

- Δείγμα: Χωρίζουμε στοιχεία σε 5άδες.
  Βρίσκουμε ενδιάμεσο κάθε 5άδας: $n / 5$ στοιχεία.
  - Χρόνος : $\Theta(n)$.
- Αναδρομικά, ενδιάμεσο στοιχείο δείγματος.
  - Χρόνος : $T(n / 5)$
- Διαίρεση με ενδιάμεσο δείγματος σαν pivot.
  - Χρόνος : $\Theta(n)$.
  - Μεγαλύτερος υποπίνακας έχει $\leq 7n/10$ στοιχεία.
- Αναδρομική επιλογή: χρόνος $T(7n / 10)$

3	5	6	2	1	4	10	11	15	9	13	8	12	14	7

7	6	12

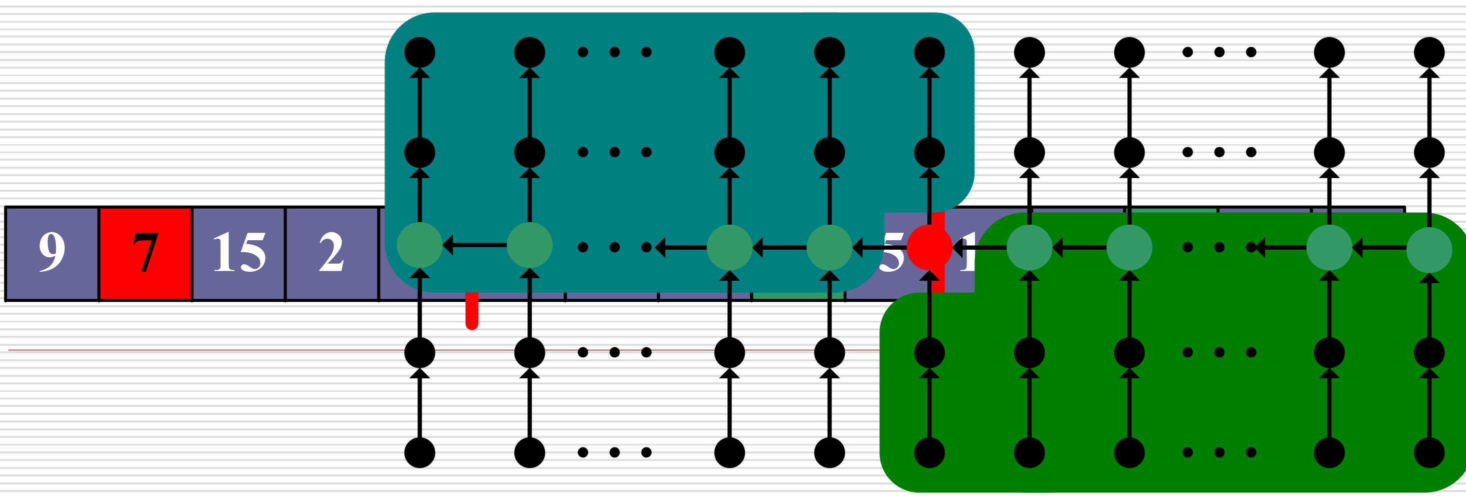
Ντετερμινιστική Επιλογή

- Χρόνος χειρότερης περίπτωσης:
  $$T(n) \leq \Theta(n) + T(n/5) + T(7n/10)\,, \quad T(1) = \Theta(1)$$
- Λύση αναδρομής : $T(n) = \Theta(n)$
- Ντετερμινιστική επιλογή σε γραμμικό χρόνο!

Ενδιάμεσο Δείγματος

- Διαίρεση με ενδιάμεσο δείγματος σαν pivot.
  - Μεγαλύτερος υποπίνακας $\leq 7n / 10$ στοιχεία.
    Μικρότερος υποπίνακας $\geq 3n / 10$ στοιχεία.
- Ταξινομούμε 5αδες και βάζουμε σε αύξουσα σειρά των ενδιάμεσων στοιχείων τους (δείγματος).
- Ενδιάμεσος δείγματος στη $(n / 10)$-οστή στήλη.
- Ενδιάμεσος δείγματος $\geq 3 \times n/10$ στοιχεία.
  Ενδιάμεσος δείγματος $\leq 3 \times n/10$ στοιχεία.

4	1	3
5	2	8
6	7	12
10	9	13
11	15	14



Σύνοψη

- Γρήγορη επιλογή (quickselect):
  - Πιθανοτικός αλγόριθμος με γραμμικό χρόνο (μ.π.)
  - Ντετερμινιστικός αλγόριθμος με γραμμικό χρόνο (χ.π.)
  - Ντετερμινιστικός αλγόριθμος με «bootstrapping»:
    - Για να βρω ενδιάμεσο για πολλά στοιχεία, βρίσκω ενδιάμεσο για λίγα.
    - Αυτό βοηθάει να βρω ενδιάμεσο για περισσότερα, …