

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για NP-Δύσκολα Προβλήματα

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Αντιμετώπιση NP-Δυσκολίας

- Αν $P \neq NP$, όχι αλγόριθμος που για **όλα τα στιγμιότυπα NP-δύσκολου** προβλήματος υπολογίζει βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.
- **Ευρετικές τεχνικές:** συχνά γρήγορα βέλτιστη λύση αλλά και **δύσκολα στιγμιότυπα** (αργά ή / και όχι βέλτιστη λύση).
 - Τοπική αναζήτηση.
 - Simulated annealing.
 - Γενετικοί αλγόριθμοι.
 - Branch-and-Bound, Branch-and-Cut.
 - ...

Αντιμετώπιση NP-Δυσκολίας

- «Εύκολες» περιπτώσεις.
- Ανάλυση μέσης περίπτωσης / πιθανοτική ανάλυση.
 - Γρήγοροι σε στιγμιότυπα που εμφανίζονται συχνότερα (αργοί μόνο για στιγμιότυπα με μικρή πιθανότητα).
 - Διαφορά από ευρετικές τεχνικές: θεωρητική ανάλυση.
 - Γνωρίζουμε πιθανότητα και πότε καλή / κακή απόδοση.
- Αλγόριθμοι προσέγγισης [Johnson, Sahni and Gonzalez, ..., 70's]
 - Αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου (χ.π.).
 - Όχι (πάντα) βέλτιστη λύση.
 - Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης ως προς ποιότητα λύσης.

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- Απόδοση χειρότερης περίπτωσης γνωστών ευρετικών αλγόριθμων (αρχικά κυρίως άπληστων).
- Σχεδιασμός poly-time αλγόριθμων που συμπεριφέρονται **αποδεδειγμένα καλά** για κάθε στιγμιότυπο.
- **Λόγος προσέγγισης**
 - Αλγόριθμου A για πρόβλημα Π (πάντα ≥ 1):

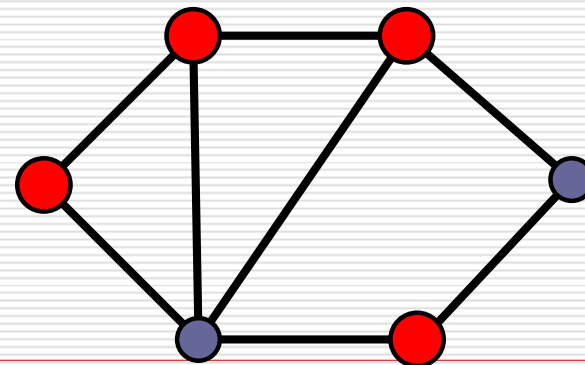
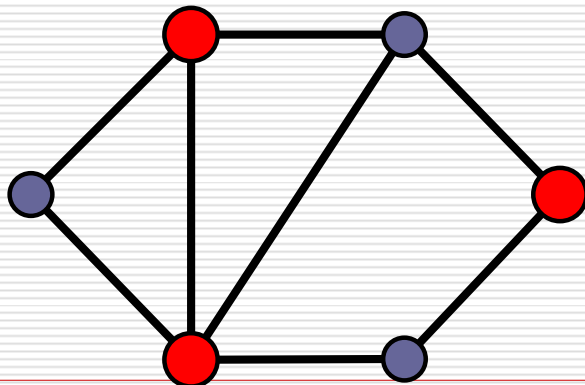
$$\text{Μεγιστοποίηση: } \gamma_{\Pi}(A) = \max_{\sigma \in S_{\Pi}} \frac{f_{\sigma}(\lambda^{*}(\sigma))}{f_{\sigma}(\lambda_A(\sigma))}$$

$$\text{Ελαχιστοποίηση: } \gamma_{\Pi}(A) = \max_{\sigma \in S_{\Pi}} \frac{f_{\sigma}(\lambda_A(\sigma))}{f_{\sigma}(\lambda^{*}(\sigma))}$$

- Προβλήματος Π : $\gamma_{\Pi} = \min_{A \text{ poly-time alg}} \{\gamma_{\Pi}(A)\}$

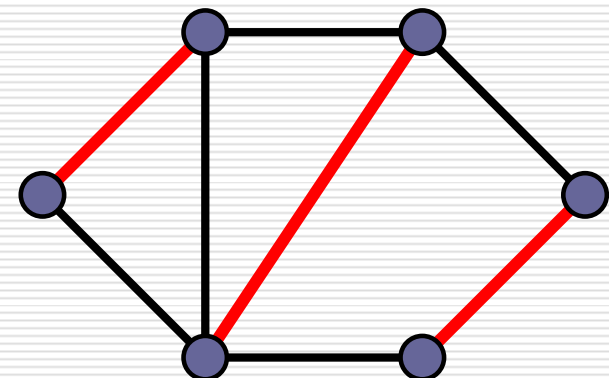
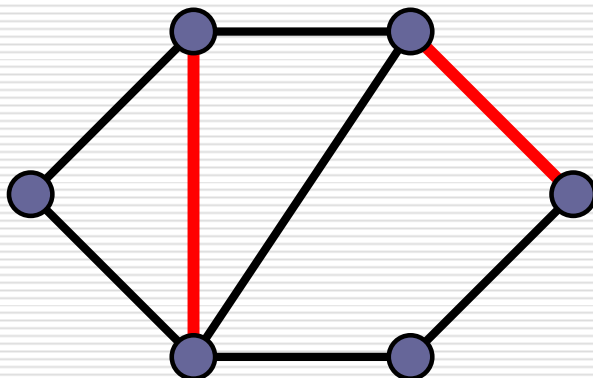
Ελάχιστο Κάλυμμα Κορυφών

- **Είσοδος:** γράφημα $G(V, E)$
- **Εφικτή λύση:** υποσύνολο κορυφών $C \subseteq V$:
κάθε ακμή τουλάχιστον ένα άκρο στο C
 - C είναι **κάλυμμα κορυφών** (vertex cover).
- **Στόχος:** κάλυμμα κορυφών με **ελάχιστο #κορυφών**.
- **NP-δύσκολο** πρόβλημα.



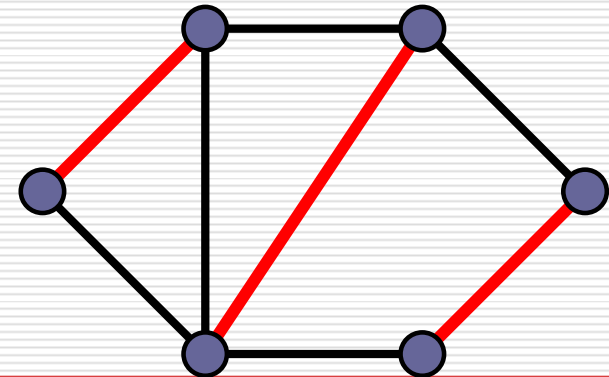
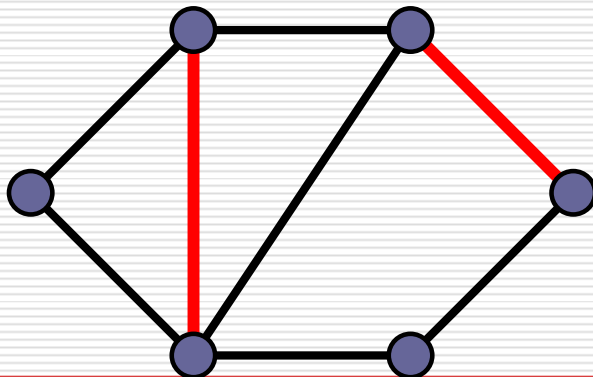
Ταίριασμα

- Ταίριασμα : υποσύνολο ακμών $M \subseteq E$ χωρίς κοινά άκρα.
- Για κάθε ταίριασμα M , τουλάχιστον ένα από τα άκρα ακμών M ανήκει σε κάθε κάλυμμα κορυφών:
 - \forall ταίριασμα M , ελάχιστο κάλυμμα κορυφών $|C^*| \geq |M|$



Μεγιστοτικό Ταίριασμα

- **Μεγιστοτικό ταίριασμα** : ταίριασμα που αν προσθέσουμε ακμή παύει να είναι ταίριασμα.
 - Μεγιστοτικό ταίριασμα M : κάθε **ακμή εκτός M** έχει **κοινό άκρο** με ακμή του M .
 - Άκρα ακμών μεγιστοτικού ταϊριάσματος M συγκροτούν κάλυμμα κορυφών C .
 - $|C| = 2|M| \leq 2|C^*|$



Αλγόριθμος MM

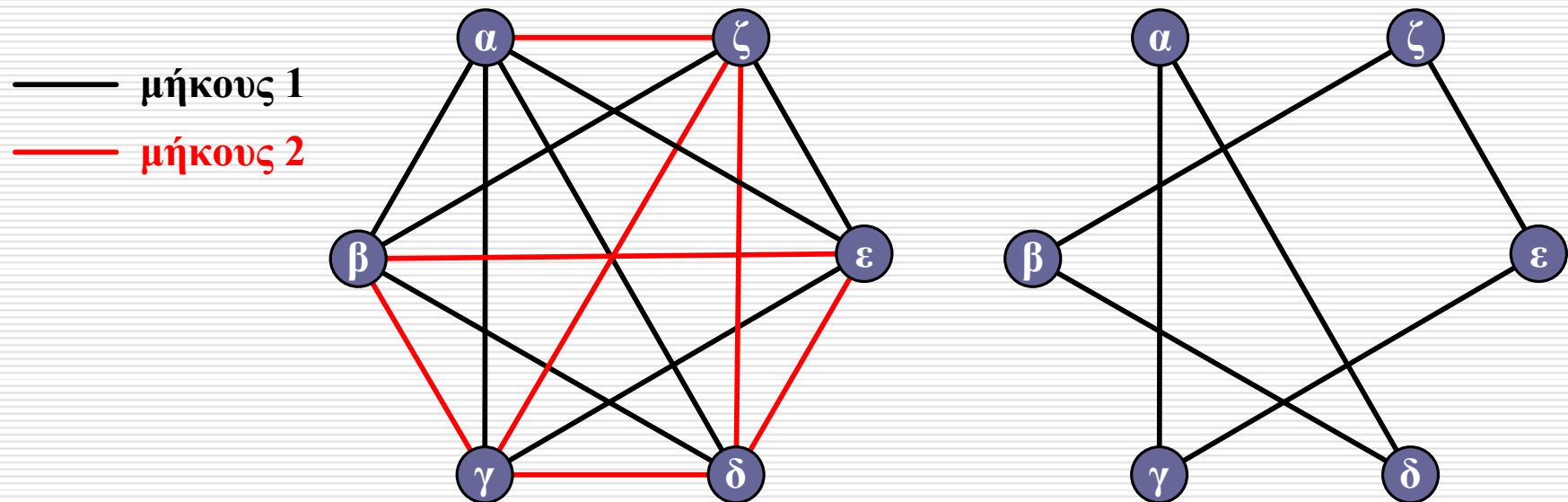
- Υπολογισμός **μεγιστοτικού ταιριάσματος M**.
 - Προσθήκη ακμών ενόσω υπάρχουν ακμές που προσθήκη τους δίνει ταίριασμα.
- Κάλυμμα κορυφών C : όλα τα **άκρα ακμών M**.
- Πολυωνυμικός χρόνος.
- **Ορθότητα** : ιδιότητα μεγιστοτικού ταιριάσματος.
- **Λόγος προσέγγισης = 2**.
 - $|C| = 2|M| \leq 2|C^*|$ (πάνω φράγμα).
 - Παραδείγματα όπου κόστος MM διπλάσιο βέλτιστου.

Βασική Ιδέα (ελαχιστοποίηση)

- Ξεκινώ από **κάτω φράγμα** στο κόστος βέλτιστης λύσης.
 - Για κάθε ταίριασμα M , $|C^*| \geq |M|$.
 - Κάτω φράγμα εκφράζεται σαν συνάρτηση **κάποιων άλλων παραμέτρων** του στιγμιότυπου εισόδου.
 - Πολλές φορές κάτω φράγμα προκύπτει από **δυσκότητα**.
- (Πολυωνυμικός) αλγόριθμος: **εφικτή λύση** με κόστος = συνάρτηση των **παραμέτρων στο κάτω φράγμα**.
 - Μεγιστοτικό ταίριασμα M : κάλυμμα κορυφών C , $|C| = 2 |M|$.
- Σύγκριση δίνει άνω φράγμα στο λόγο προσέγγισης.
 - $|C| = 2 |M| \leq 2 |C^*|$.

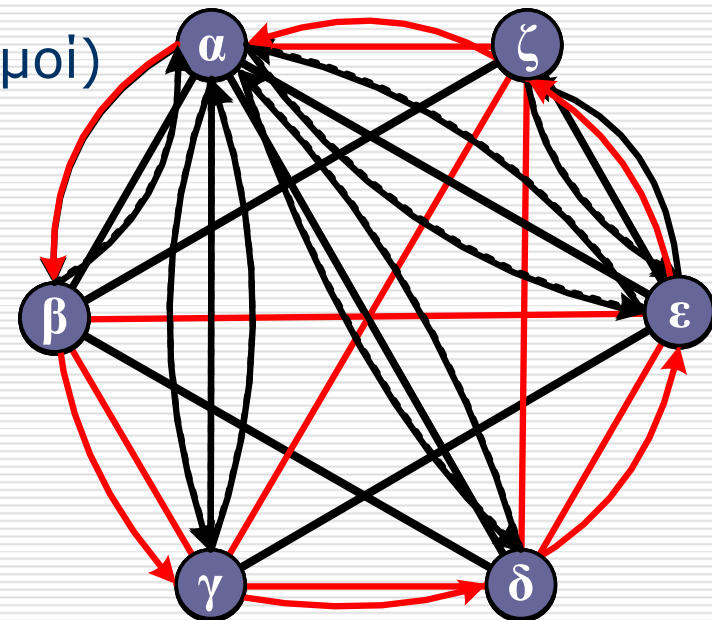
Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

- **Είσοδος:** n σημεία με (συμμετρικές) αποστάσεις τους.
 - Αποστάσεις ικανοποιούν **τριγωνική ανισότητα** (metric space).
- **Αποδεκτές λύσεις:** **περιοδείες** (μεταθέσεις) n σημείων.
- **Στόχος:** **περιοδεία ελάχιστου συνολικού μήκους.**



Κάτω φράγμα

- Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο (ΕΕΔ).
 - Κάθε περιοδεία έχει μήκος \geq βάρος ΕΕΔ.
 - Περιοδεία – ακμή: επικαλύπτον δέντρο.
- Αλγόριθμος:
 - T^* ΕΕΔ βάρους $w(T^*)$
 - «Διπλασιασμός» ακμών T^* (άρτιοι βαθμοί)
 - Κύκλος Euler στο διπλασιασμένο T^*
 - Αποφυγή διπλών εμφανίσεων «κόβοντας» δρόμο.
- Μήκος $\leq 2 w(T^*)$ λόγω τριγωνικής ανισότητας
- Λόγος προσέγγισης ≤ 2 (tight).



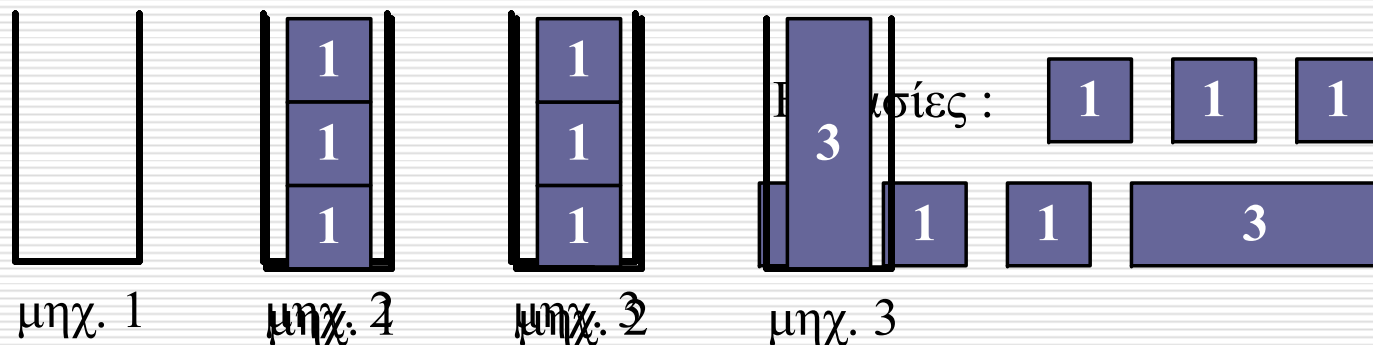
Καλύτερος Αλγόριθμος

- Αλγόριθμος Χριστοφίδη (1976)
 - Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο.
 - Ταίριασμα ελάχιστου βάρους μεταξύ κορυφών ΕΕΔ με περιττό βαθμό.
 - Κύκλος Euler.
 - Περιοδεία μήκους \leq βάρους ΕΕΔ + βάρους ταιριάσματος.
 - Λόγος προσέγγισης = **3/2**.
- Μετά 3 χρόνια, **καλύτερος γνωστός αλγόριθμος**.
- Υπάρχουν καλύτεροι αλγόριθμοι για **ειδικές περιπτώσεις** (π.χ. TSP(1, 2), planar TSP, ...).

Δρομολόγηση Εργασιών

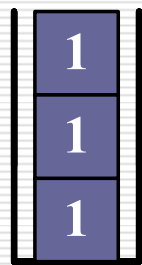
- **Είσοδος:**
 - m ίδιες μηχανές (σύνολο M).
 - n εργασίες μεγέθους w_1, w_2, \dots, w_n (σύνολο J).
- **Αποδεκτές λύσεις:** κάθε δρομολόγηση ϕ
- **Στόχος:** ελαχιστοποίηση μέγιστου φορτίου μηχανής:

$$\forall \phi: J \mapsto M, S(\phi) = \max_{i \in M} \left\{ \sum_{j: \phi(j)=i} w_j \right\}$$
$$\phi^* = \arg \min_{\phi: J \mapsto M} \{ S(\phi) \}$$

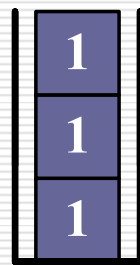


Κάτω φράγμα

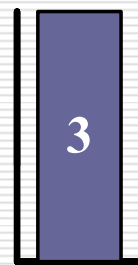
- $S^* \geq \sum_{j=1}^n w_j / m = W_{\text{tot}} / m$
 - $S^* \geq \max_{1 \leq j \leq n} \{w_j\} = w_{\text{max}}$
- $\Rightarrow S^* \geq \max\{W_{\text{tot}} / m, w_{\text{max}}\}$



μηχ. 1



μηχ. 2



μηχ. 3

Αλγόριθμος Graham (1966)

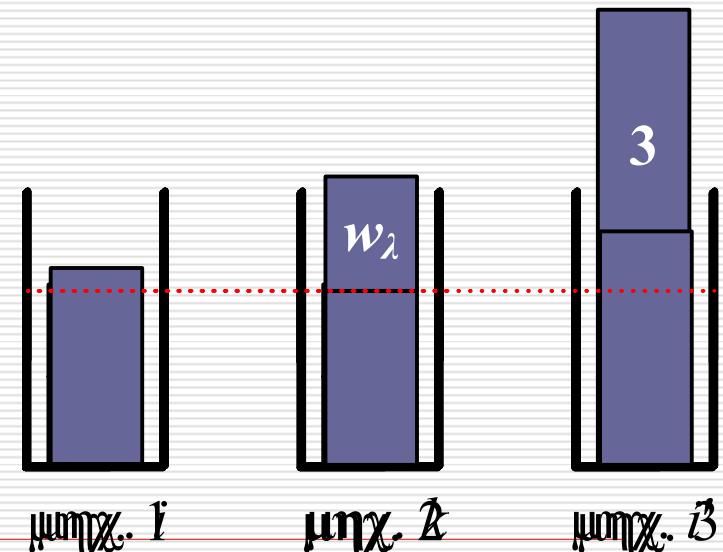
- Εργασίες **μία - μία** με σειρά που δίνονται (**online**).
- Νέα εργασία σε μηχανή **με ελάχιστο φορτίο (greedy)**.
- Άνω φράγμα στο μέγιστο φορτίο:
 - Φορτίο μηχανής i πριν δρομολογηθεί εργασία j : $S_j^{(i)}$
 - k μηχανή με μεγαλύτερο φορτίο
 - w_λ τελευταία εργασία στην μηχανή k

$$\forall i \in M, S_\lambda^{(k)} \leq S_\lambda^{(i)}$$

$$\Rightarrow m S_\lambda^{(k)} \leq \sum_{i=1}^m S_\lambda^{(i)} \leq W_{\text{tot}} - w_\lambda$$

$$\Rightarrow S_\lambda^{(k)} \leq (W_{\text{tot}} - w_\lambda) / m$$

$$\begin{aligned} S_\lambda^{(k)} + w_\lambda &\leq W_{\text{tot}} / m + \left(1 - \frac{1}{m}\right) w_\lambda \\ &\leq \left(2 - \frac{1}{m}\right) S^* \end{aligned}$$



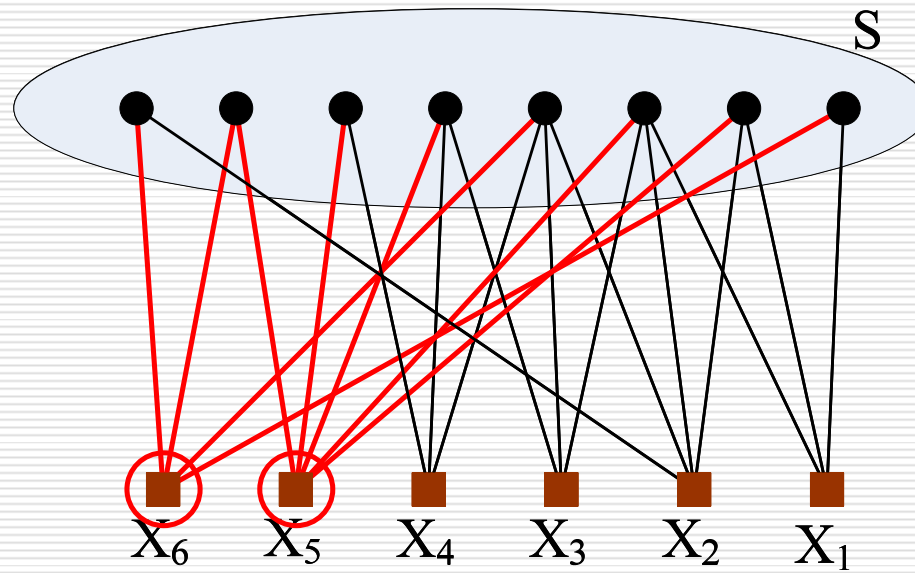
Κάλυμμα Συνόλου (Set Cover)

- Σύνολο στοιχείων $S = \{1, \dots, n\}$
- Μη-κενά υποσύνολα του S : X_1, \dots, X_m , $\bigcup_{i=1}^m X_i = S$
- Κόστος υποσυνόλων: w_1, \dots, w_m
- Ζητούμενο: κάλυμμα S με ελάχιστο κόστος.
 - Ελάχιστου κόστους συλλογή υποσυνόλων \mathcal{C} : $\bigcup_{i \in \mathcal{C}} X_i = S$

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in [m] \end{array}$$

- **NP-δύσκολο** πρόβλημα.
- **Απληστία**: καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Παράδειγμα



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $X_1 = \{1, 2, 3\}, X_2 = \{2, 3, 4, 8\}, X_3 = \{3, 4, 5\}$
 $X_4 = \{4, 5, 6\}, X_5 = \{2, 3, 5, 6, 7\}, X_6 = \{1, 4, 7, 8\}$
- Βέλτιστη λύση: X_5, X_6

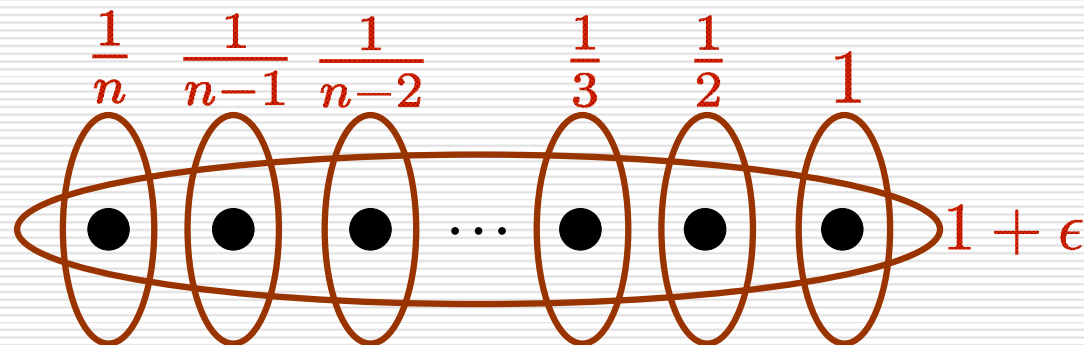
Άπληστος Αλγόριθμος

- Σύνολο U **ακάλυπτων** στοιχείων (αρχικά $U = S$).
- Επιλογή υποσυνόλου που **ελαχιστοποιεί κόστος ανά ακάλυπτο στοιχείο** που καλύπτει: $w_i/|X_i \cap U|$
- **Ενημέρωση** U και συνέχεια ενόσω U δεν είναι κενό.

```
greedySetCover( $S, (X_1, w_1), \dots, (X_m, w_m)$ )  
   $U \leftarrow S; \mathcal{C} \leftarrow \emptyset;$   
  while  $U \neq \emptyset$  do  
     $j \leftarrow \arg \min_{i \in [m]} \{w_i/|X_i \cap U|\};$   
     $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{j\}; U \leftarrow U \setminus X_j;$   
  return( $\mathcal{C}, \sum_{i \in \mathcal{C}} w_i$ );
```

Αντιπαράδειγμα

- Δεν πλησιάζει τη βέλτιστη λύση!
 - Βέλτιστη λύση έχει κόστος $1+\epsilon$.
 - Κόστος άπληστου αλγόριθμου: $H_n = \sum_{i=1}^n 1/n \approx \ln n$
 - Παράδειγμα: χειρότερη περίπτωση άπληστου αλγόριθμου.



Ανάλυση

- Έστω **OPT** κόστος βέλτιστης λύσης.
- Αρχή ***i*-οστής** επανάλ.: **ακάλυπτα** στοιχεία $n_i \leq n - i + 1$ (κάθε προηγούμενη **επανάληψη καλύπτει ≥ 1** στοιχείο).
- **Βέλτιστη** καλύπτει στοιχεία με μέσο κόστος OPT/n_i
- **Άπληστη επιλογή** έχει κόστος / στοιχείο $\leq OPT/n_i$
- Αθροίζοντας για $\leq n$ επαναλήψεις, κόστος άπληστου αλγ.
$$\leq OPT \sum_{i=1}^n 1/i = OPT H_n \approx OPT \ln n$$
- **Λόγος προσέγγισης $\approx \ln n$**
- Αποδεικνύεται ότι **δεν** υπάρχει αλγόριθμος **πολυωνυμικού** χρόνου με **καλύτερο λόγο προσέγγισης**.

Μη-Προσεγγισιμότητα

- Προβλήματα στο NP που η προσέγγιση τους είναι NP-δύσκολη!
 - Πλανόδιος Πωλητής χωρίς τριγωνική ανισότητα, μέγιστη κλίκα / σύνολο ανεξαρτησίας, χρωματικός αριθμός, ...
- Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή χωρίς Τριγωνική Ανισότητα (ΠΠΠ):
 - η σημεία και συμμετρικές αποστάσεις (αλλά όχι metric).
 - Ζητούμενο: περιοδία ελάχιστου συνολικού μήκους.
- Για κάθε γ , γ -προσέγγιση ΠΠΠ είναι **NP-δύσκολη** [Sahni και Gonzalez, 1976].
 - Κάθε γ -προσεγγιστικός αλγόριθμος για ΠΠΠ λύνει πρόβλημα κύκλου Hamilton!

Απόδειξη

- Γράφημα $G(V, E)$: υπάρχει **κύκλος Hamilton** στο G ;
- Αναγωγή σε **γ -προσέγγιση ΠΠΠ** (για οποιοδήποτε $\gamma > 1$):
 - Κορυφές \leftrightarrow σημεία.
 - Αποστάσεις: $d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{u, v\} \in E \\ \gamma|V| & \text{αν } \{u, v\} \notin E \end{cases}$
 - **Κύκλος Hamilton** στο $G \Rightarrow$ **περιοδία μήκους $|V|$**
 - **Όχι κύκλος Hamilton** στο $G \Rightarrow$
περιοδία μήκους $\geq \gamma|V| + |V| - 1 > \gamma|V|$
- **γ -προσεγγιστικός αλγόριθμος** για ΠΠΠ:
 - **Κύκλος Hamilton** στο $G \Leftrightarrow$ **περιοδία μήκους $\leq \gamma|V|$**
 - Αποφασίζει (σωστά) αν υπάρχει κύκλος Hamilton στο G .

Επισκόπηση Περιοχής

- **Σχήματα προσέγγισης:** λόγος $(1+\epsilon)$, για κάθε $\epsilon > 0$.
 - Σακίδιο, δρομολόγηση εργασιών, γεωμετρικά προβλήματα, ...
 - Δυναμικός προγραμματισμός και διακριτοποίηση.
- **Σταθερός λόγος προσέγγισης.**
 - **MAX-SNP-δυσκολία:** NP-δύσκολο να υπάρξει σχήμα
 - **PCP Θεώρημα:** $NP = PCP(\log n, 1)$.
 - Προβλήματα σε **μετρικούς χώρους:** ΠΠΠ-ΤΑ, facility location, δέντρο Steiner, ...
 - Προβλήματα σε **γραφήματα:** κάλυμμα κορυφών, μέγιστη τομή, feedback vertex set, ...
 - Προβλήματα **ικανοποιησιμότητας:** Max-k-SAT.

Επισκόπηση Περιοχής

- Τεχνικές για σταθερό λόγο προσέγγισης:
 - Τοπική αναζήτηση – μέθοδος απληστίας.
 - Primal-dual μέθοδος.
 - Dual-fitting μέθοδος.
 - Relaxation του Ακέραιο Προγράμματος σε Γραμμικό Πρόγραμμα, επίλυση, και **τυχαίο στρογγύλεμα μη-ακέραιων λύσεων.**

Επισκόπηση Περιοχής

- **Λογαριθμικός λόγος** προσέγγισης.
 - Ελάχιστο κάλυμμα συνόλων
 - Άπληστος αλγόριθμος (dual-fitting) καλύτερος δυνατός.
 - Αραιότερη τομή, γραμμικές διατάξεις, ...
 - Εμβάπτιση μετρικών χώρων σε απλούστερους χώρους όπου προβλήματα λύνονται ευκολότερα.
- **Πολυωνυμικός λόγος** προσέγγισης.
 - Μέγιστη κλίκα / σύνολο ανεξαρτησίας, χρωματισμός γραφημάτων, ...
 - PCP Θεώρημα: για κάθε $\varepsilon > 0$, προσέγγιση μέγιστης κλίκας σε λόγο $|V|^{1-\varepsilon}$ είναι NP-δύσκολο πρόβλημα!