



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 21/12/2012

Άσκηση 1: Διάσχιση του Ποταμού

Στην πόλη των ερωτευμένων υπάρχει ένα μεγάλο ποτάμι που χωρίζει τη γειτονιά των ελεύθερων νέων ανδρών από τη γειτονιά των ελεύθερων νέων γυναικών. Τις νύχτες, στην μία όχθη του ποταμού, φθάνουν με τις βάρκες τους οι άνδρες που θέλουν να συναντήσουν το ταίρι τους στην απέναντι όχθη. Επειδή είναι σκοτάδι και δεν φαίνεται τίποτα, κάθε άνδρας γνωρίζει μόνο την ευθεία γραμμή που πρέπει να ακολουθήσει, καθώς θα διασχίζει το ποτάμι με τη βάρκα του, για να βρεθεί στο σημείο που τον περιμένει ταίρι του, στην απέναντι όχθη. Λόγω του σκότους, οι άνδρες δεν μπορούν να δουν τις υπόλοιπες βάρκες, και έτσι υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης. Για να είναι βέβαιο ότι δύο βάρκες δεν θα συγκρουστούν πρέπει οι ευθείες που θα ακολουθήσουν καθώς διασχίζουν το ποτάμι να μην τέμνονται μεταξύ τους.

Για να βοηθήσετε τους ερωτευμένους, χρειάζεται να γράψετε ένα πρόγραμμα για τον υπολογισμό του μέγιστου πλήθους αντρών που μπορούν να διασχίσουν το ποτάμι ταυτόχρονα χωρίς να διατρέχουν κίνδυνο σύγκρουσης.

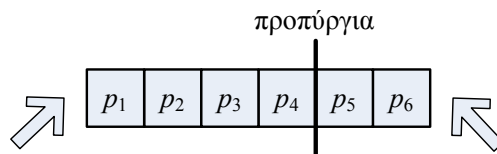
Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάσει από το standard input έναν θετικό ακέραιο αριθμό που αντιστοιχεί στο πλήθος N των ζευγαριών. Σε κάθε μία από τις επόμενες N γραμμές, θα υπάρχουν δύο ακέραιοι A_i και B_i , χωρισμένοι με κενό. Ο αριθμός A_i δηλώνει τη θέση του i -οστού άνδρα στην μία όχθη, και ο αριθμός B_i δηλώνει το σημείο της άλλης όχθης όπου τον περιμένει το ταίρι του.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) το μέγιστο πλήθος ανδρών που μπορούν να διασχίσουν το ποτάμι ταυτόχρονα χωρίς να διατρέχουν κίνδυνο σύγκρουσης.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$1 \leq N \leq 500000$	5	4
$1 \leq A_i, B_i \leq 10^7$	5 15	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	8 17	
Όριο μνήμης: 64 MB.	11 17	
	5 3	
	7 2	

Άσκηση 2: Παιχνίδι Στρατηγικής

Σε ένα νέο ηλεκτρονικό παιχνίδι στρατηγικής, ο παίκτης αναλαμβάνει τον ρόλο του ηγεμόνα μιας αδύναμης χώρας που δέχεται επίθεση από έναν σημαντικά ισχυρότερο αντίπαλο. Αρχικά ο παίκτης ελέγχει όλες τις N πόλεις της χώρας του. Η χώρα είναι μακρόστενη, έτσι οι πόλεις μπορούν να αναπαρισταθούν ως μία ακολουθία διαδοχικών τετραγώνων που είναι αριθμημένα από το 1 έως το N , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Στο τέλος κάθε χρόνου, κάθε πόλη i πληρώνει p_i χρυσά νομίσματα στον παίκτη, ως ετήσιο φόρο, εφόσον βέβαια βρίσκεται ακόμη υπό τον έλεγχο του. Ο αντίπαλος είναι σημαντικά ισχυρότερος, και έτσι είναι βέβαιο ότι τελικά θα επικρατήσει. Καθώς η ήττα είναι δεδομένη, στόχος του παίκτη είναι να συλλέξει όσο το δυνατόν περισσότερα χρυσά νομίσματα, πριν ολόκληρη η χώρα τεθεί υπό την κατοχή του αντιπάλου.



Σχήμα 1. Παράδειγμα για την Άσκηση 2. Αν ο αντίπαλος επιτεθεί από τα δυτικά (αριστερά), οι πόλεις 5 και 6 θα μείνουν υπό τον έλεγχο του παίκτη, και το κέρδος του για το τρέχον έτος θα είναι $p_5 + p_6$. Αν ο αντίπαλος επιτεθεί από τα ανατολικά (δεξιά), οι πόλεις 1, 2, 3 και 4 θα μείνουν υπό τον έλεγχο του παίκτη, και το κέρδος του για το τρέχον έτος θα είναι $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.

Στην αρχή κάθε έτους λοιπόν, ο παίκτης επιλέγει να κτίσει τα προπύργια του μεταξύ δύο γειτονικών πόλεων που είναι ακόμη υπό τον έλεγχό του. Κατόπιν, ο αντίπαλος επιλέγει να επιτεθεί είτε από τα δυτικά κατακτώντας όλες τις πόλεις πριν τα προπύργια είτε από τα ανατολικά κατακτώντας όλες τις πόλεις μετά τα προπύργια. Στο τέλος του έτους, ο παίκτης εισπράττει τους φόρους από όλες τις πόλεις που παραμένουν ακόμη υπό τον έλεγχό του. Επίσης, μέχρι το τέλος του έτους, ο αντίπαλος έχει καταφέρει να καταστρέψει τα προπύργια, και μετά σταματά να μάχεται, και προετοιμάζεται για το επόμενο έτος. Το ίδιο σενάριο επαναλαμβάνεται κάθε χρόνο, μέχρι όλη η χώρα να τεθεί υπό τον έλεγχο του αντιπάλου.

Ο παίκτης, που έχει στόχο να συλλέξει όσο το δυνατόν περισσότερα χρυσά νομίσματα, πρέπει να επιλέξει προσεκτικά που θα κτίσει τα προπύργια του κάθε χρόνο. Είναι γνωστό ότι ο αντίπαλος έχει υπηρεσίες πληροφοριών υψηλού επιπέδου, και ότι επιλέγει πάντα με βέλτιστο τρόπο αν θα επιτεθεί από τα δυτικά ή από τα ανατολικά, προσπαθώντας να ελαχιστοποιήσει το πλήθος των χρυσών νομισμάτων που θα συλλέξει ο παίκτης.

Με βάση το παραπάνω σενάριο, να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το μέγιστο πλήθος χρυσών νομισμάτων που μπορεί να συλλέξει ο παίκτης.

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε $N = 5$ πόλεις, με $p_1 = 8$, $p_2 = 6$, $p_3 = 2$, $p_4 = 4$, και $p_5 = 2$. Η καλύτερη επιλογή για τον παίκτη είναι να κτίσει τα προπύργια του μεταξύ των πόλεων 2 και 3. Ο αντίπαλος επιτίθεται από τα δυτικά, κατακτά τις πόλεις 1 και 2, και αφήνει τον παίκτη να συλλέξει 8 χρυσά νομίσματα (από τις πόλεις 3, 4, και 5) στο τέλος του έτους. Το επόμενο έτος, ο παίκτης κτίζει τα προπύργια του μεταξύ των πόλεων 3 και 4. Ο αντίπαλος επιτίθεται από τα ανατολικά, κατακτά τις πόλεις 4 και 5, και αφήνει τον παίκτη να συλλέξει 2 χρυσά νομίσματα (από την πόλη 3) στο τέλος του έτους. Δεν υπάρχουν πλέον δύο γειτονικές πόλεις υπό τον έλεγχο του παίκτη, μεταξύ των οποίων θα μπορούσε να κτίσει προπύργια. Έτσι το παιχνίδι ολοκληρώνεται εδώ, με συνολικό κέρδος 10 χρυσών νομισμάτων για τον παίκτη.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input έναν θετικό ακέραιο αριθμό που αντιστοιχεί στο πλήθος N των πόλεων. Σε κάθε μία από τις επόμενες N γραμμές, θα υπάρχει ένας φυσικός αριθμός p_i που δηλώνει το πλήθος των χρυσών νομισμάτων που πληρώνει η πόλη i ως ετήσιο φόρο.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) το μέγιστο πλήθος χρυσών νομισμάτων που μπορεί να συλλέξει ο παίκτης, δεδομένου ότι ο αντίπαλος επιλέγει με βέλτιστο τρόπο την ετήσια επίθεσή του.

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$2 \leq N \leq 500$	5	10
$1 \leq p_i \leq 30.000$	8	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	6	
Όριο μνήμης: 128 MB.	2	
<i>Bonus:</i> κάποια αρχεία με	4	
$2000 \leq N \leq 2.500$	2	