



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

### Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

3η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 20/1/2013

## Άσκηση 1: Αρχηγείο Ακτιβιστών

Στη μακρινή Χώρα των Αλγορίθμων, η ακτιβιστική ομάδα της Αναζήτησης κατά Πλάτος έχει εγκαταστήσει το αρχηγείο της στα σπήλαια που βρίσκονται στους πρόποδες του βουνού του Επαναλαμβανόμενου Τετραγωνισμού. Το συγκρότημα του αρχηγείου αναπτύσσεται σε  $k$  επίπεδα με  $N$  αριθμημένες αίθουσες το καθένα. Η μοναδική είσοδος στο αρχηγείο είναι ένας διάδρομος που οδηγεί από την επιφάνεια του εδάφους στην αίθουσα  $s$  του πρώτου επιπέδου, ενώ ο επικεφαλής της ομάδας βρίσκεται στην αίθουσα  $t$  του  $k$ -οστού επιπέδου.

Οι αίθουσες στο ίδιο επίπεδο δεν συνδέονται απευθείας μεταξύ τους, και η μετακίνηση γίνεται μέσω διαδρόμων που συνδέουν (ανά δύο) αίθουσες που βρίσκονται σε διαδοχικά επίπεδα. Μάλιστα, για να διατηρήσουν την αρχιτεκτονική του αρχηγείου σχετικά απλή και εύκολα απομνημονεύσιμη, οι ακτιβιστές της Αναζήτησης κατά Πλάτος έχουν φροντίσει ώστε οι συνδέσεις μεταξύ αιθουσών σε διαδοχικά επίπεδα να είναι ίδιες για όλα τα επίπεδα. Δηλαδή, αν η αίθουσα  $x$  στο πρώτο επίπεδο συνδέεται με τις αίθουσες  $y_1, \dots, y_\ell$  στο δεύτερο επίπεδο, τότε η αίθουσα  $x$  σε κάθε επίπεδο  $i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ , συνδέεται με τις αίθουσες  $y_1, \dots, y_\ell$  στο επίπεδο  $i + 1$ . Έτσι για την απρόσκοπτη μετακίνηση στο αρχηγείο, αρκεί η γνώση των συνδέσεων μεταξύ των αιθουσών δύο διαδοχικών επιπέδων.

Για να αξιολογήσουν την ευκολία των μετακινήσεων εντός του αρχηγείου, οι ακτιβιστές της Αναζήτησης κατά Πλάτος σκέφτηκαν να μετρήσουν πόσες είναι οι διαφορετικές συντομότερες διαδρομές που οδηγούν από την είσοδο του αρχηγείου στην αίθουσα όπου βρίσκεται ο επικεφαλής. Σας ζητούν να τους βοηθήσετε γράφοντας ένα πρόγραμμα για αυτόν τον σκοπό.

**Λεδομένα Εισόδου:** Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input το πλήθος των επιπέδων, το γράφημα που περιγράφει τις συνδέσεις μεταξύ των αιθουσών δύο διαδοχικών επιπέδων, και τις αίθουσες αφετηρίας και προορισμού. Όσον αφορά στην μορφή της εισόδου, στην πρώτη γραμμή θα δίνονται (με αυτή τη σειρά, χωρισμένα με κενό) το πλήθος  $k$  των επιπέδων, το πλήθος  $N$  των αιθουσών / κορυφών σε κάθε επίπεδο, το πλήθος  $M$  των διαδρόμων / ακμών μεταξύ κορυφών δύο διαδοχικών επιπέδων, ο αριθμός  $s$  της αίθουσας αφετηρίας στο πρώτο επίπεδο, και ο αριθμός  $t$  της αίθουσας προορισμού στο τελευταίο επίπεδο. Σε καθεμία από τις υπόλοιπες  $M$  γραμμές θα δίνεται μια σύνδεση  $(x, y)$  μεταξύ αιθουσών / κορυφών διαδοχικών επιπέδων. Συγκεκριμένα, η σύνδεση  $(x, y)$  δηλώνει ότι η αίθουσα με αριθμό  $x$  σε κάθε επίπεδο  $i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ , συνδέεται με διάδρομο / ακμή με την αίθουσα με αριθμό  $y$  στο επίπεδο  $i + 1$ .

**Λεδομένα Εξόδου:** Το πρόγραμμα σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο πλήθος  $C$  των διαφορετικών συντομότερων μονοπατιών που οδηγούν από την αίθουσα  $s$  στο πρώτο επίπεδο στην αίθουσα  $t$  στο  $k$ -οστό επίπεδο. Επειδή αυτός ο αριθμός μπορεί να είναι εξαιρετικά μεγάλος, το πρόγραμμά σας πρέπει στην πραγματικότητα να τυπώνει τον  $C \bmod (10^8 + 7)$ .

Περιορισμοί:	Παράδειγμα Εισόδου:	Παράδειγμα Εξόδου:
$2 \leq k \leq 10000$	6 5 11 1 3	10
$2 \leq N \leq 100$	1 2	
$2 \leq M \leq 4000$	1 3	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.	2 2	
Όριο μνήμης: 64 MB.	2 3	
	2 4	
Θα υπάρχουν ακόμη, ως bonus,	3 4	
δύο παραδείγματα αξιολόγησης	3 5	
όπου $k = 10^8$ .	4 1	
	4 5	
	5 1	
	5 5	

## Άσκηση 2: Αρχεία Ελέγχου

Όπως γνωρίζετε, για τον έλεγχο των λύσεων στις προγραμματιστικές ασκήσεις, κάθε πρόγραμμα εκτελείται σε ένα σύνολο αρχείων ελέγχου (test cases) που σκοπό έχουν τον έλεγχο της ορθότητας και της αποδοτικότητας της λύσης.

Η δημιουργία αυτών των αρχείων ελέγχου συχνά δεν είναι εύκολη διαδικασία. Θέλουμε λοιπόν τη βοήθειά σας στη δημιουργία αρχείων ελέγχου για το εξής πρόβλημα: “Δεδομένου ενός μη-κατευθυνόμενου πλήρους γραφήματος  $G$  με βάρη στις ακμές, να υπολογίσετε το Ελάχιστο Συνδεδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του  $G$ ”. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ήδη ετοιμάσει τα αρχεία εξόδου με τα επιθυμητά ΕΣΔ, και θέλουμε τη βοήθειά σας για τη δημιουργία των αντίστοιχων αρχείων εισόδου.

Ένα πρόβλημα είναι ότι το γράφημα  $G$  του αρχείου εισόδου μπορεί να μην έχει μοναδικό ΕΣΔ. Αυτό κάνει πιο δύσκολο τον έλεγχο ορθότητας των απαντήσεων. Θέλουμε λοιπόν να αποφύγουμε τέτοιες περιπτώσεις δημιουργώντας γραφήματα / αρχεία εισόδου με μοναδικό ΕΣΔ.

Επιπλέον, θέλουμε τα αρχεία ελέγχου να μπορούν να διακρίνουν μεταξύ ενός σωστού αλγόριθμου και ενός λάθους αλγόριθμου, ο οποίος ίσως τυχαίνει να υπολογίζει τη σωστή απάντηση σε κάποιες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν όλες οι ακμές του γραφήματος εισόδου που δεν ανήκουν στο ΕΣΔ είχαν βάρος πολύ μεγαλύτερο από τις ακμές του ΕΣΔ, και το παρατηρούσε κάποιος, θα μπορούσε να υλοποιήσει έναν αλγόριθμο που απλά θα απένκλειε τις ακμές πολύ μεγάλου βάρους από το ΕΣΔ. Αυτός ο αλγόριθμος δεν θα ήταν βέβαια σωστός, όμως πιθανότατα θα υπολόγιζε τις σωστές απαντήσεις για αρκετά από τα συγκεκριμένα αρχεία ελέγχου. Για να αποφύγουμε τέτοιες περιπτώσεις, θέλουμε το γράφημα εισόδου να έχει το ελάχιστο δυνατό συνολικό βάρος ακμών.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι δεδομένου ενός δέντρου  $T$  με βάρη στις ακμές, θέλουμε να υπολογίσουμε ένα μη-κατευθυνόμενο πλήρες γράφημα  $G$ , με ελάχιστο συνολικό βάρος ακμών, για το οποίο το  $T$  αποτελεί το μοναδικό Ελάχιστο Συνδεδετικό Δέντρο. Ζητάμε να μας βοηθήσετε γράφοντας ένα πρόγραμμα για αυτόν το σκοπό.

**Δεδομένα Εισόδου:** Αρχικά, το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input έναν θετικό ακέραιο  $N$  που αντιστοιχεί στο πλήθος των κορυφών του δέντρου  $T$ . Οι κορυφές είναι αριθμημένες από το 1 έως το  $N$ . Σε κάθε μία από τις επόμενες  $N - 1$  γραμμές, θα υπάρχουν τρεις θετικοί

ακέραιοι  $a_i$ ,  $b_i$  και  $w_i$  χωρισμένοι με κενό. Αυτοί δηλώνουν ότι η κορυφή  $a_i$  συνδέεται στο  $T$  με την κορυφή  $b_i$  μέσω μιας ακμής βάρους  $w_i$ .

**Λεδομένα Εξόδου:** Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) το ελάχιστο συνολικό βάρος ακμών ενός μη-κατευθυνόμενου πλήρους γραφήματος  $G$  για το οποίο το δέντρο  $T$  αποτελεί το μοναδικό Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο. Σημειώστε ότι για μεγάλες τιμές του  $N$ , το ελάχιστο συνολικό βάρος ακμών του  $G$  (καθώς και κάποια από τα ενδιάμεσα αποτελέσματα που χρειάζονται για τον υπολογισμό του) μπορεί να υπερβαίνουν το  $2^{32}$ .

<b>Περιορισμοί:</b>	<b>Παραδείγματα Εισόδου:</b>	<b>Παραδείγματα Εξόδου:</b>
$3 \leq N \leq 500000$	3	19
$1 \leq a_i, b_i \leq N$	1 2 4	
$1 \leq w_i \leq 10000$	2 3 7	
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.		
Όριο μνήμης: 64 MB.	4	12
	1 2 1	
	1 3 1	
	1 4 2	