

# Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για NP-Δύσκολα Προβλήματα

---

**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Αντιμετώπιση NP-Δυσκολίας

---

- Αν  $P \neq NP$ , όχι αλγόριθμος που για **όλα τα στιγμιότυπα NP-δύσκολου** προβλήματος υπολογίζει βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.
- **Ευρετικές τεχνικές:** συχνά γρήγορα βέλτιστη λύση αλλά και **δύσκολα στιγμιότυπα** (αργά ή / και όχι βέλτιστη λύση).
  - Τοπική αναζήτηση.
  - Simulated annealing.
  - Γενετικοί αλγόριθμοι.
  - Branch-and-Bound, Branch-and-Cut.
  - ...

# Αντιμετώπιση NP-Δυσκολίας

---

- «Εύκολες» περιπτώσεις.
- Ανάλυση μέσης περίπτωσης / πιθανοτική ανάλυση.
  - Γρήγοροι σε στιγμιότυπα που εμφανίζονται συχνότερα (αργοί μόνο για στιγμιότυπα με μικρή πιθανότητα).
  - Διαφορά από ευρετικές τεχνικές: θεωρητική ανάλυση.
    - Γνωρίζουμε πιθανότητα και πότε καλή / κακή απόδοση.
- Αλγόριθμοι προσέγγισης [Johnson, Sahni and Gonzalez, ..., 70's]
  - Αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου (χ.π.).
  - Όχι (πάντα) βέλτιστη λύση.
  - Ανάλυση χειρότερης περίπτωσης ως προς ποιότητα λύσης.

# Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

---

- Απόδοση **χειρότερης περίπτωσης** γνωστών ευρετικών αλγόριθμων (**αρχικά κυρίως άπληστων**).
- Σχεδιασμός poly-time αλγόριθμων που συμπεριφέρονται **αποδεδειγμένα καλά** για κάθε στιγμιότυπο.

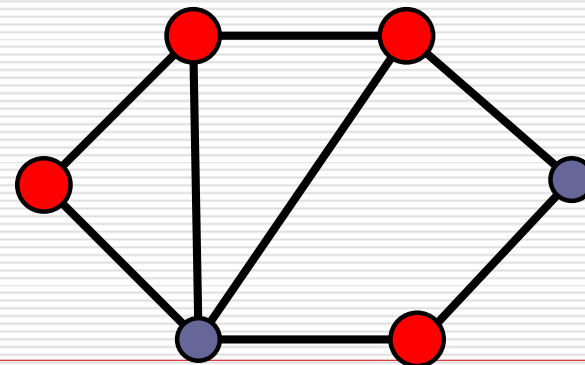
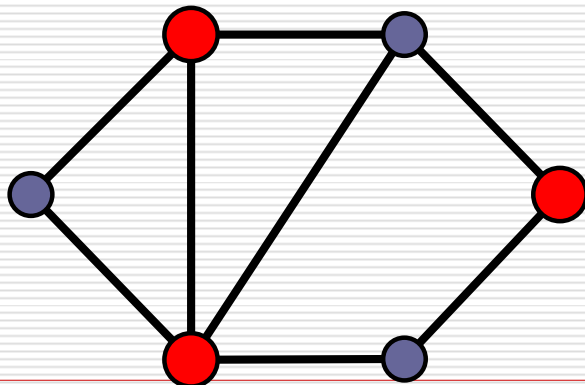
- **Λόγος προσέγγισης**

- Αλγόριθμου  $A$  για πρόβλημα  $\Pi$ :  $\gamma_{\Pi}(A) = \max_{\sigma \in S_{\Pi}} \frac{f_{\sigma}(\lambda_A(\sigma))}{f_{\sigma}(\lambda^*(\sigma))}$

- Προβλήματος  $\Pi$ :  $\gamma_{\Pi} = \min_{A \text{ poly-time alg}} \{\gamma_{\Pi}(A)\}$

# Ελάχιστο Κάλυμμα Κορυφών

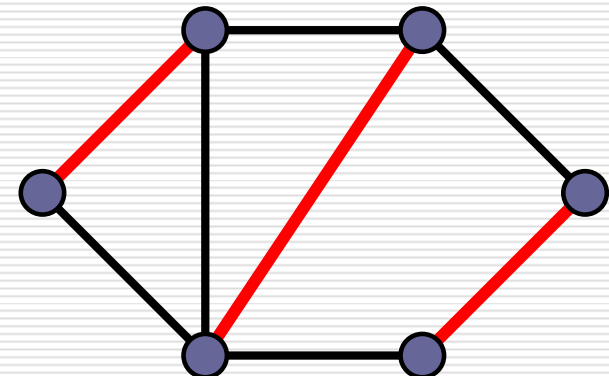
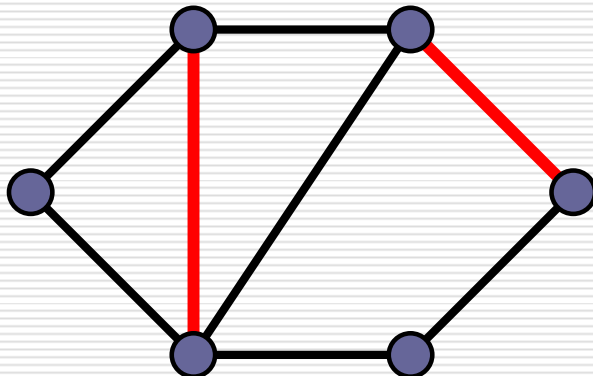
- **Είσοδος:** γράφημα  $G(V, E)$
- **Εφικτή λύση:** υποσύνολο κορυφών  $C \subseteq V$ :  
κάθε ακμή τουλάχιστον ένα άκρο στο  $C$ 
  - $C$  είναι **κάλυμμα κορυφών** (vertex cover).
- **Στόχος:** κάλυμμα κορυφών με **ελάχιστο #κορυφών**.
- **NP-δύσκολο** πρόβλημα.



# Ταίριασμα

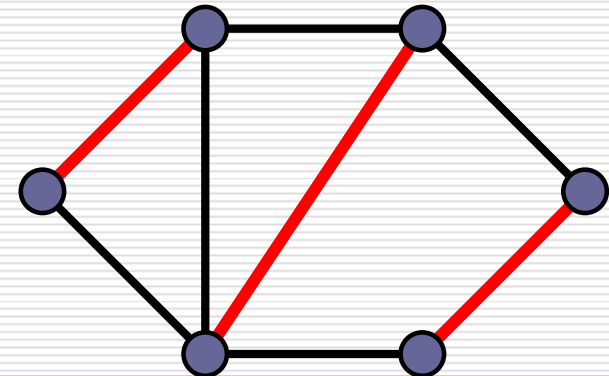
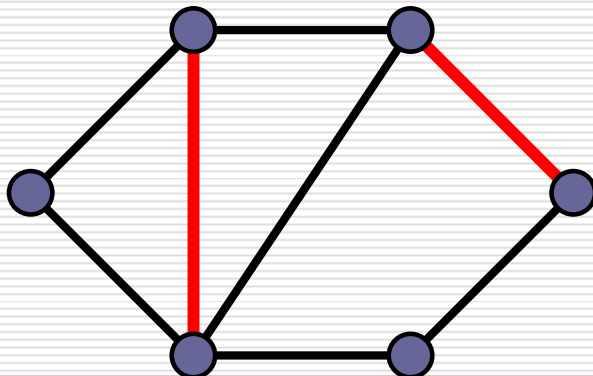
---

- Ταίριασμα : υποσύνολο ακμών  $M \subseteq E$  χωρίς κοινά άκρα.
- Για κάθε ταίριασμα  $M$ , τουλάχιστον ένα από τα άκρα ακμών  $M$  ανήκει σε κάθε κάλυμμα κορυφών:
  - $\forall$  ταίριασμα  $M$ , ελάχιστο κάλυμμα κορυφών  $|C^*| \geq |M|$



# Μεγιστοτικό Ταίριασμα

- **Μεγιστοτικό ταίριασμα** : ταίριασμα που αν προσθέσουμε ακμή παύει να είναι ταίριασμα.
  - Μεγιστοτικό ταίριασμα  $M$  : κάθε **ακμή εκτός  $M$**  έχει **κοινό άκρο** με ακμή του  $M$ .
  - Άκρα ακμών μεγιστοτικού ταϊριάσματος  $M$  συγκροτούν κάλυμμα κορυφών  $C$ .
  - $|C| = 2|M| \leq 2|C^*|$



# Αλγόριθμος MM

---

- Υπολογισμός **μεγιστοτικού ταιριάσματος M**.
  - Προσθήκη ακμών ενόσω υπάρχουν ακμές που προσθήκη τους δίνει ταίριασμα.
- Κάλυμμα κορυφών C : όλα τα **άκρα ακμών M**.
- Πολυωνυμικός χρόνος.
- **Ορθότητα** : ιδιότητα μεγιστοτικού ταιριάσματος.
- **Λόγος προσέγγισης = 2**.
  - $|C| = 2|M| \leq 2|C^*|$  (πάνω φράγμα).
  - Παραδείγματα όπου κόστος MM διπλάσιο βέλτιστου.



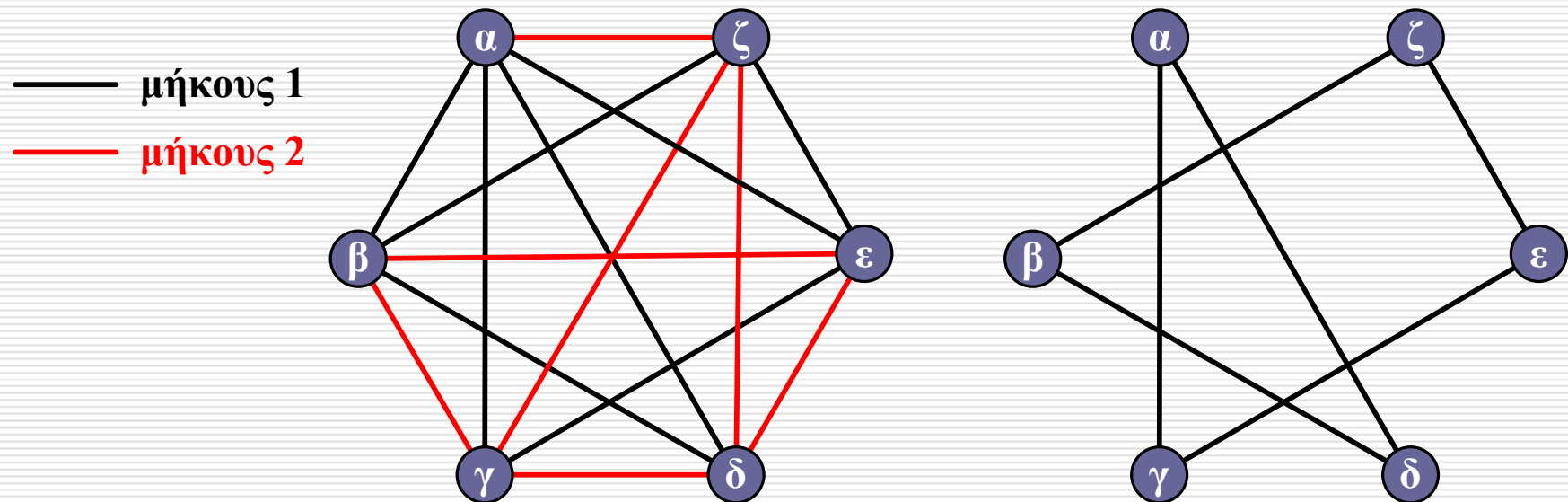
# Βασική Ιδέα (ελαχιστοποίηση)

---

- Ξεκινώ από **κάτω φράγμα** στο κόστος βέλτιστης λύσης.
  - Για κάθε ταίριασμα  $M$ ,  $|C^*| \geq |M|$ .
  - Κάτω φράγμα εκφράζεται σαν συνάρτηση **κάποιων άλλων παραμέτρων** του στιγμιότυπου εισόδου.
  - Πολλές φορές κάτω φράγμα προκύπτει από **δυσικότητα**.
- (Πολυωνυμικός) αλγόριθμος: **εφικτή λύση** με κόστος = συνάρτηση των **παραμέτρων στο κάτω φράγμα**.
  - Μεγιστοτικό ταίριασμα  $M$ : κάλυμμα κορυφών  $C$ ,  $|C| = 2 |M|$ .
- Σύγκριση δίνει άνω φράγμα στο λόγο προσέγγισης.
  - $|C| = 2 |M| \leq 2 |C^*|$ .

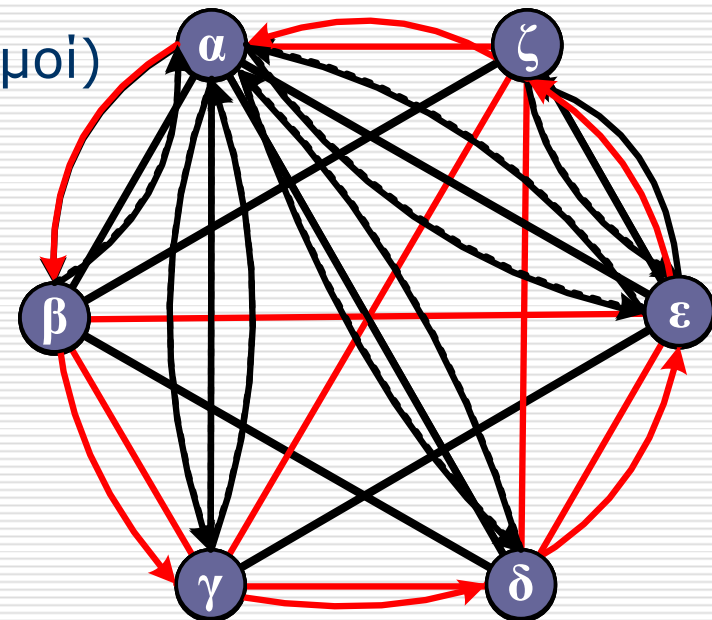
# Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

- **Είσοδος:**  $n$  σημεία με (συμμετρικές) αποστάσεις τους.
  - Αποστάσεις ικανοποιούν **τριγωνική ανισότητα** (metric space).
- **Αποδεκτές λύσεις:** **περιοδείες** (μεταθέσεις)  $n$  σημείων.
- **Στόχος:** **περιοδεία ελάχιστου συνολικού μήκους.**



# Κάτω φράγμα

- Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο (ΕΕΔ).
  - Κάθε περιοδεία έχει μήκος  $\geq$  βάρος ΕΕΔ.
  - Περιοδεία – ακμή: επικαλύπτον δέντρο.
- Αλγόριθμος:
  - $T^*$  ΕΕΔ βάρους  $w(T^*)$
  - «Διπλασιασμός» ακμών  $T^*$  (άρτιοι βαθμοί)
  - Κύκλος Euler στο διπλασιασμένο  $T^*$
  - Αποφυγή διπλών εμφανίσεων «κόβοντας» δρόμο.
- Μήκος  $\leq 2 w(T^*)$  λόγω τριγωνικής ανισότητας
- Λόγος προσέγγισης  $\leq 2$  (tight).



# Καλύτερος Αλγόριθμος

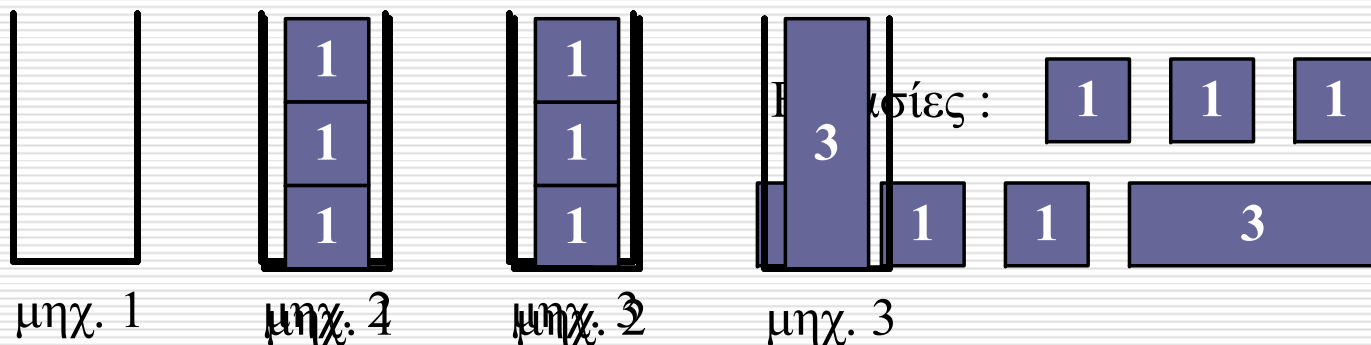
---

- Αλγόριθμος Χριστοφίδη (1976)
  - Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο.
  - Ταίριασμα ελάχιστου βάρους μεταξύ κορυφών ΕΕΔ με περιττό βαθμό.
  - Κύκλος Euler.
  - Περιοδεία μήκους  $\leq$  βάρος ΕΕΔ + βάρος ταιριάσματος.
  - Λόγος προσέγγισης = **3/2**.
- Μετά 35 χρόνια, **καλύτερος γνωστός αλγόριθμος**.
- Υπάρχουν καλύτεροι αλγόριθμοι για **ειδικές περιπτώσεις** (π.χ. TSP(1, 2), Euclidean TSP, planar TSP, graphic TSP).

# Δρομολόγηση Εργασιών

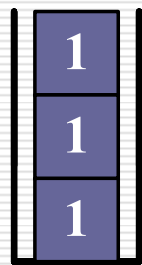
- **Είσοδος:**
  - $m$  ίδιες μηχανές (σύνολο  $M$ ).
  - $n$  εργασίες μεγέθους  $w_1, w_2, \dots, w_n$  (σύνολο  $J$ ).
- **Αποδεκτές λύσεις:** κάθε δρομολόγηση  $\phi$
- **Στόχος:** **ελαχιστοποίηση μέγιστου φορτίου μηχανής:**

$$\forall \phi: J \mapsto M, S(\phi) = \max_{i \in M} \left\{ \sum_{j: \phi(j)=i} w_j \right\}$$
$$\phi^* = \arg \min_{\phi: J \mapsto M} \{ S(\phi) \}$$

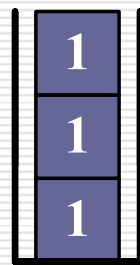


# Κάτω φράγμα

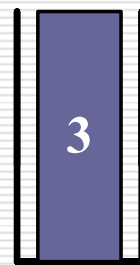
- $S^* \geq \sum_{j=1}^n w_j / m = W_{\text{tot}} / m$
  - $S^* \geq \max_{1 \leq j \leq n} \{w_j\} = w_{\text{max}}$
- $\Rightarrow S^* \geq \max\{W_{\text{tot}} / m, w_{\text{max}}\}$



μηχ. 1



μηχ. 2



μηχ. 3

# Αλγόριθμος Graham (1966)

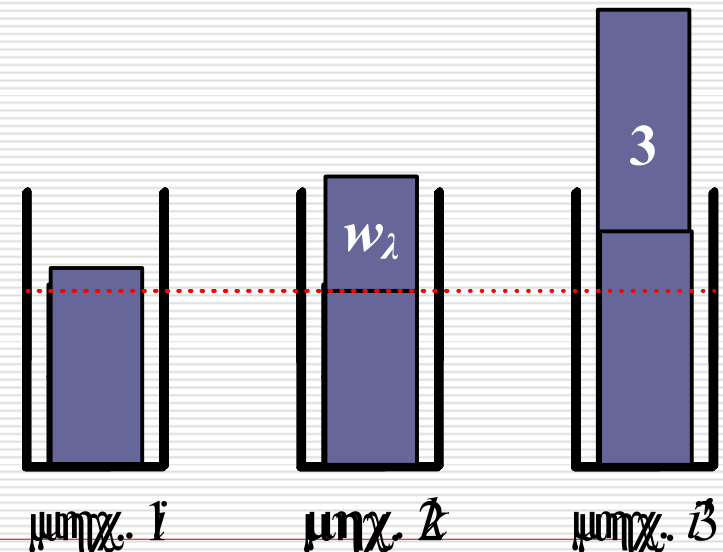
- Εργασίες **μία - μία** με σειρά που δίνονται (**online**).
- Νέα εργασία σε μηχανή **με ελάχιστο φορτίο (greedy)**.
- Άνω φράγμα στο μέγιστο φορτίο:
  - Φορτίο μηχανής  $i$  πριν δρομολογηθεί εργασία  $j$  :  $S_j^{(i)}$
  - $k$  μηχανή με μεγαλύτερο φορτίο
  - $w_\lambda$  τελευταία εργασία στην μηχανή  $k$

$$\forall i \in M, S_\lambda^{(k)} \leq S_\lambda^{(i)}$$

$$\Rightarrow m S_\lambda^{(k)} \leq \sum_{i=1}^m S_\lambda^{(i)} \leq W_{\text{tot}} - w_\lambda$$

$$\Rightarrow S_\lambda^{(k)} \leq (W_{\text{tot}} - w_\lambda) / m$$

$$\begin{aligned} S_\lambda^{(k)} + w_\lambda &\leq W_{\text{tot}} / m + \left(1 - \frac{1}{m}\right) w_\lambda \\ &\leq \left(2 - \frac{1}{m}\right) S^* \end{aligned}$$



# Κάλυμμα Συνόλου (Set Cover)

---

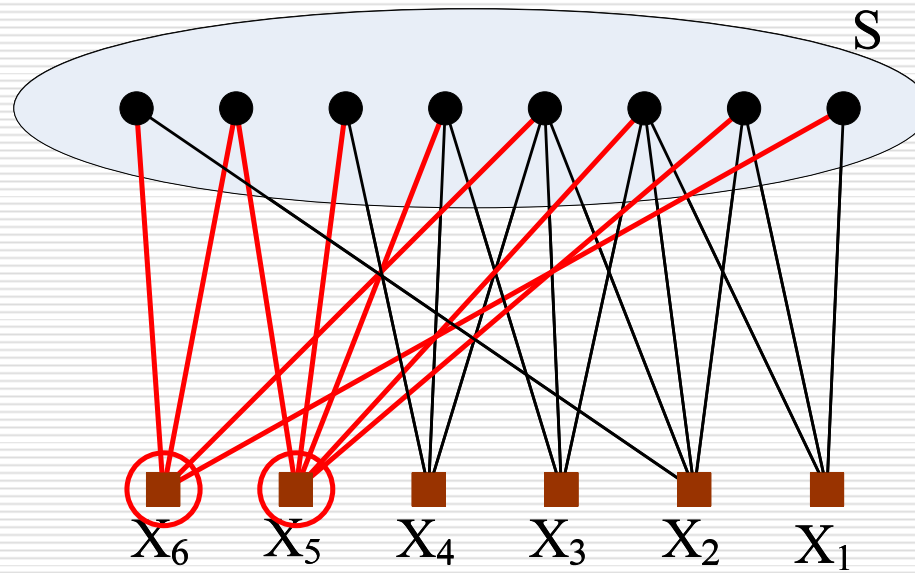
- Σύνολο στοιχείων  $S = \{1, \dots, n\}$
- Μη-κενά υποσύνολα του  $S$ :  $X_1, \dots, X_m$ ,  $\bigcup_{i=1}^m X_i = S$
- Κόστος υποσυνόλων:  $w_1, \dots, w_m$
- Ζητούμενο: κάλυμμα του  $S$  με ελάχιστο κόστος.
  - Ελάχιστου κόστους συλλογή υποσυνόλων  $\mathcal{C}$ :  $\bigcup_{i \in \mathcal{C}} X_i = S$

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in [m] \end{array}$$

- **NP-δύσκολο** πρόβλημα.
- **Απληστία**: καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος.



# Παράδειγμα



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $X_1 = \{1, 2, 3\}, X_2 = \{2, 3, 4, 8\}, X_3 = \{3, 4, 5\}$   
 $X_4 = \{4, 5, 6\}, X_5 = \{2, 3, 5, 6, 7\}, X_6 = \{1, 4, 7, 8\}$
- Βέλτιστη λύση:  $X_5, X_6$

# Άπληστος Αλγόριθμος

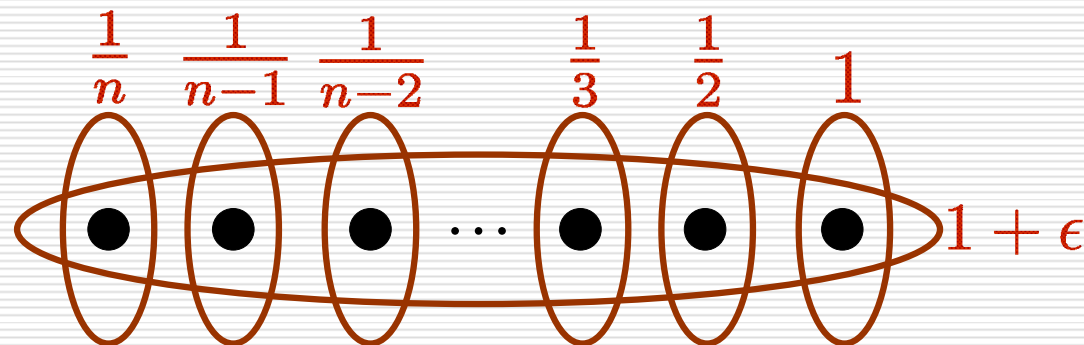
---

- Σύνολο  $U$  **ακάλυπτων** στοιχείων (αρχικά  $U = S$ ).
- Επιλογή υποσυνόλου που **ελαχιστοποιεί κόστος ανά ακάλυπτο στοιχείο** που καλύπτει:  $w_i/|X_i \cap U|$
- **Ενημέρωση**  $U$  και συνέχεια ενόσω  $U$  δεν είναι κενό.

```
greedySetCover( $S, (X_1, w_1), \dots, (X_m, w_m)$ )  
   $U \leftarrow S; \mathcal{C} \leftarrow \emptyset;$   
  while  $U \neq \emptyset$  do  
     $j \leftarrow \arg \min_{i \in [m]} \{w_i/|X_i \cap U|\};$   
     $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{j\}; U \leftarrow U \setminus X_j;$   
  return( $\mathcal{C}, \sum_{i \in \mathcal{C}} w_i$ );
```

# Αντιπαράδειγμα

- Δεν πλησιάζει τη βέλτιστη λύση!
  - Βέλτιστη λύση έχει κόστος  $1+\epsilon$ .
  - Κόστος άπληστου αλγόριθμου:  $H_n = \sum_{i=1}^n 1/n \approx \ln n$
  - Παράδειγμα: χειρότερη περίπτωση άπληστου αλγόριθμου.



# Ανάλυση

---

- Έστω **OPT** κόστος βέλτιστης λύσης.
- Αρχή ***i*-οστής** επανάλ.: **ακάλυπτα** στοιχεία  $n_i \leq n - i + 1$  (κάθε προηγούμενη **επανάληψη καλύπτει  $\geq 1$**  στοιχείο).
- **Βέλτιστη** καλύπτει στοιχεία με μέσο κόστος  $OPT/n_i$
- **Άπληστη επιλογή** έχει κόστος / στοιχείο  $\leq OPT/n_i$
- Αθροίζοντας για  $\leq n$  επαναλήψεις, κόστος άπληστου αλγ.  
$$\leq OPT \sum_{i=1}^n 1/i = OPT H_n \approx OPT \ln n$$
- **Λόγος προσέγγισης  $\approx \ln n$**
- Αποδεικνύεται ότι **δεν** υπάρχει αλγόριθμος **πολυωνυμικού** χρόνου με **καλύτερο λόγο προσέγγισης** (εκτός αν  $NP \subseteq (quasi)P$ ).

# Μη-Προσεγγισιμότητα

---

- Προβλήματα στο NP που η προσέγγιση τους είναι NP-δύσκολη!
  - Πλανόδιος Πωλητής χωρίς τριγωνική ανισότητα, μέγιστη κλίκα / σύνολο ανεξαρτησίας, χρωματικός αριθμός, ...
- Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή χωρίς Τριγωνική Ανισότητα (ΠΠΠ):
  - η σημεία και συμμετρικές αποστάσεις (αλλά όχι metric).
  - Ζητούμενο: περιοδεία ελάχιστου συνολικού μήκους.
- Για κάθε  $\gamma$ ,  $\gamma$ -προσέγγιση ΠΠΠ είναι **NP-δύσκολη** [Sahni και Gonzalez, 1976].
  - Κάθε  $\gamma$ -προσεγγιστικός αλγόριθμος για ΠΠΠ λύνει πρόβλημα κύκλου Hamilton!

# Απόδειξη

---

- Γράφημα  $G(V, E)$ : υπάρχει **κύκλος Hamilton** στο  $G$ ;
- Αναγωγή σε  **$\gamma$ -προσέγγιση ΠΠΠ** (για οποιοδήποτε  $\gamma > 1$ ):
  - Κορυφές  $\leftrightarrow$  σημεία.
  - Αποστάσεις:  $d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{u, v\} \in E \\ \gamma|V| & \text{αν } \{u, v\} \notin E \end{cases}$
  - **Κύκλος Hamilton** στο  $G \Rightarrow$  **περιοδία μήκους  $|V|$**
  - **Όχι κύκλος Hamilton** στο  $G \Rightarrow$   
**περιοδία μήκους  $\geq \gamma|V| + |V| - 1 > \gamma|V|$**
- **$\gamma$ -προσεγγιστικός αλγόριθμος** για ΠΠΠ:
  - **Κύκλος Hamilton** στο  $G \Leftrightarrow$  **περιοδία μήκους  $\leq \gamma|V|$**
  - Αποφασίζει (σωστά) αν υπάρχει κύκλος Hamilton στο  $G$ .

# Επισκόπηση Περιοχής

---

- **Σχήματα προσέγγισης:** λόγος  $(1+\epsilon)$ , για κάθε  $\epsilon > 0$ .
  - Σακίδιο, δρομολόγηση εργασιών, γεωμετρικά προβλήματα, ...
  - Δυναμικός προγραμματισμός και διακριτοποίηση.
- **Σταθερός λόγος προσέγγισης.**
  - **MAX-SNP-δυσκολία:** NP-δύσκολο να υπάρξει σχήμα
    - **PCP Θεώρημα:**  $NP = PCP(\log n, 1)$ .
  - Προβλήματα σε **μετρικούς χώρους:** ΠΠΠ-ΤΑ, facility location, δέντρο Steiner, ...
  - Προβλήματα σε **γραφήματα:** κάλυμμα κορυφών, μέγιστη τομή, feedback vertex set, ...
  - Προβλήματα **ικανοποιησιμότητας:** Max-k-SAT.

# Επισκόπηση Περιοχής

---

- Τεχνικές για σταθερό λόγο προσέγγισης:
  - Τοπική αναζήτηση – μέθοδος απληστίας.
  - Primal-dual μέθοδος.
  - Dual-fitting μέθοδος.
  - Relaxation του Ακέραιο Προγράμματος σε Γραμμικό Πρόγραμμα, επίλυση, και τυχαίο στρογγύλεμα μη-ακέραιων λύσεων.



# Επισκόπηση Περιοχής

---

- **Λογαριθμικός λόγος** προσέγγισης.
  - Ελάχιστο κάλυμμα συνόλων
    - Άπληστος αλγόριθμος (dual-fitting) καλύτερος δυνατός.
  - Αραιότερη τομή, γραμμικές διατάξεις, ...
  - Εμβάπτιση μετρικών χώρων σε απλούστερους χώρους όπου προβλήματα λύνονται ευκολότερα.
- **Πολυωνυμικός λόγος** προσέγγισης.
  - Μέγιστη κλίκα / σύνολο ανεξαρτησίας, χρωματισμός γραφημάτων, ...
  - PCP Θεώρημα: για κάθε  $\varepsilon > 0$ , προσέγγιση μέγιστης κλίκας σε λόγο  $|V|^{1-\varepsilon}$  είναι NP-δύσκολο πρόβλημα!