

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Γραφημάτων

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

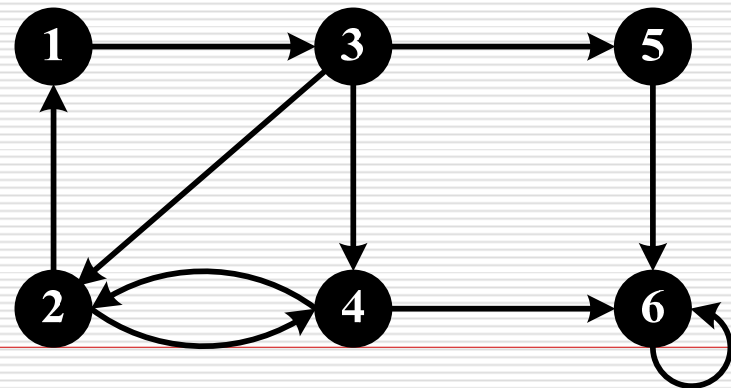
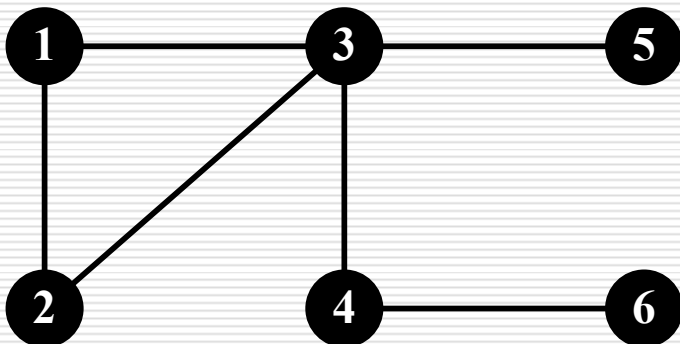
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



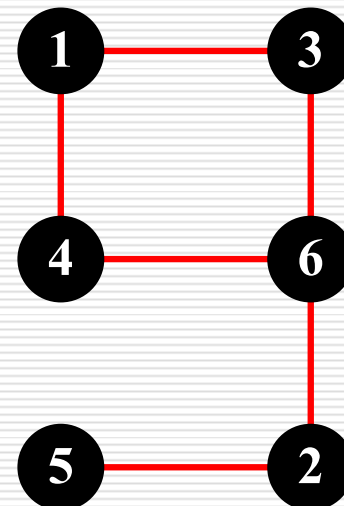
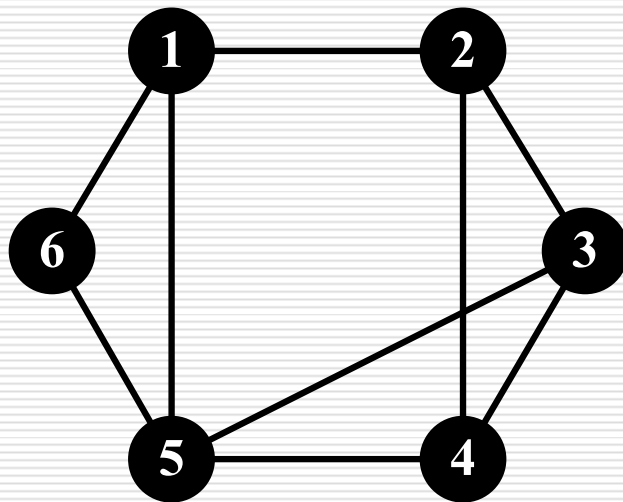
Γραφήματα

- Μοντελοποίηση πολλών σημαντικών προβλημάτων (π.χ. δίκτυα – συνεκτικότητα, διαδρομές, δρομολόγηση – ανάθεση πόρων, layouts, ...).
- Γράφημα $G(V, E)$: V κορυφές
 E ακμές (ζεύγη σχετιζόμενων κορυφών)
 - Τάξη $|V| = n$ και μέγεθος $|E| = m$.
 - Κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα, απλά μη-κατευθ.
 - Βάρη (μήκη) στις ακμές $G(V, E, w)$, $w : E \mapsto \mathbb{R}$



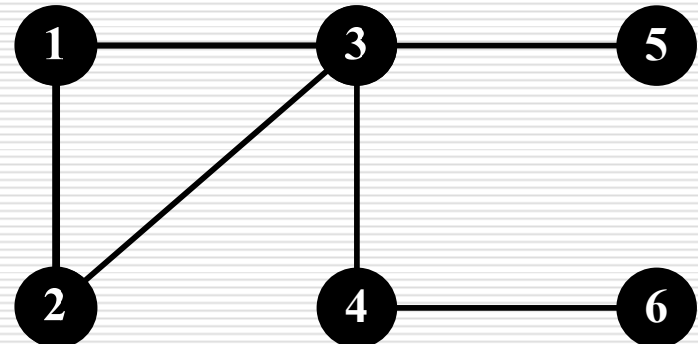
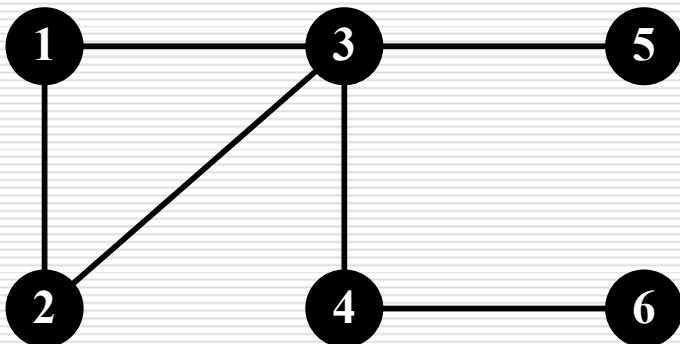
Πλήρες και Συμπληρωματικό Γράφημα

- Πλήρες γράφημα n κορυφών: K_n
 - Όλα τα ζεύγη κορυφών συνδέονται με ακμή: $n(n-1)/2$ ακμές.
- Συμπληρωματικό γράφημα \overline{G} γραφήματος G .
 - Ίδιο σύνολο κορυφών. Ακμές: όσες δεν υπάρχουν στο G .
 - Συμπληρωματικό \overline{G} : αρχικό γράφημα G .



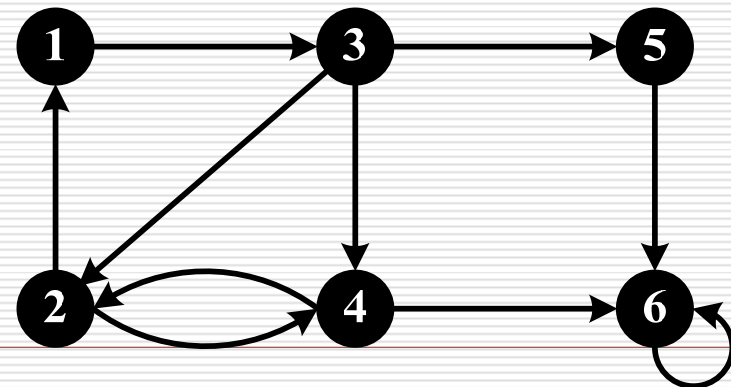
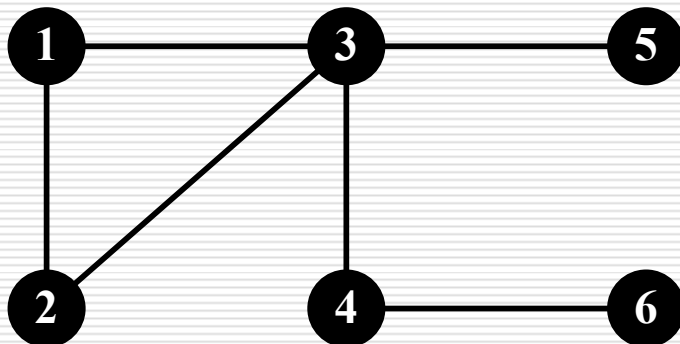
Υπο-Γραφήματα

- Υπογράφημα $G'(V', E')$ του $G(V, E)$ όταν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.
 - Επικαλύπτον ή συνδετικό (spanning) όταν $V' = V$, δηλ. έχει **όλες τις κορυφές** του αρχικού γραφήματος, επιλέγουμε τις **ακμές** που τις συνδέουν.
 - Επαγόμενο (induced) όταν $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$ δηλ. έχει **όλες τις ακμές** του αρχικού μεταξύ των επιλεγμένων **κορυφών**.



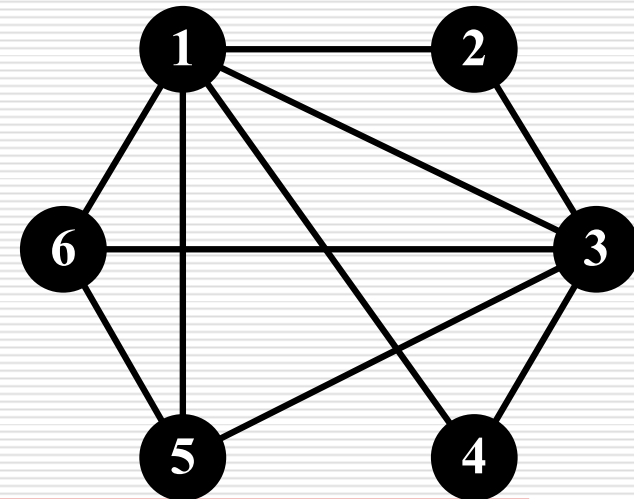
Βαθμός Κορυφής

- Βαθμός κορυφής $\text{deg}(v)$: # ακμών εφραπτόμενων στη v .
 - Κατευθυνόμενα: προς-τα-έσω και προς-τα-έξω βαθμός.
 - Μη-κατευθυνόμενο $G(V, E)$: $\sum_{v \in V} \text{deg}(v) = 2 |E|$
 - Άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.



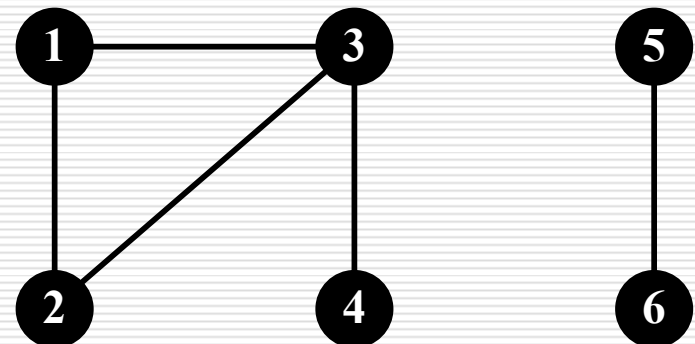
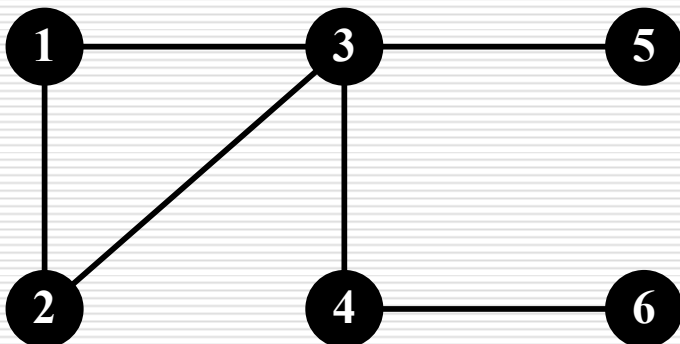
Διαδρομές, Μονοπάτια, και Κύκλοι

- Διαδρομή – Μονοκονδυλιά – Μονοπάτι – Κύκλος
 - **Διαδρομή:** ακολουθία «διαδοχικών» ακμών.
 - «Διαδοχικές» ακμές: κατάληξη πρώτης = αρχή της δεύτερης.
 - Π.χ. {2, 1}, {1, 3}, {3, 4}, {4, 1}, {1, 5}, {5, 3}, {3, 6}.
 - **Μονοκονδυλιά:** διαδρομή χωρίς επανάληψη ακμών.
 - **(Απλό) μονοπάτι:** διαδρομή χωρίς επανάληψη κορυφών (και ακμών).
 - Υπάρχει διαδρομή $u - v$ αν υπάρχει **μονοπάτι $u - v$** .
 - **Απόσταση** $d(u, v)$ (χωρίς και με βάρη): μήκος συντομότερου $u - v$ μονοπατιού.
 - **Κλειστή διαδρομή** όταν άκρα της ταυτίζονται.
 - Κλειστή μονοκονδυλιά ή **κύκλωμα**.
 - **(Απλός) κύκλος:** μονοπάτι που άκρα του ταυτίζονται («κλειστό» μονοπάτι).



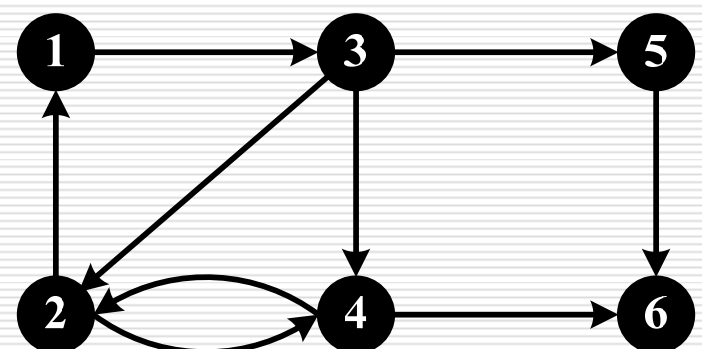
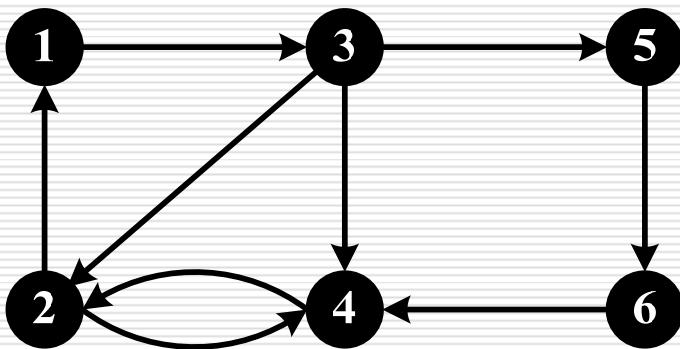
ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- (Μη-κατευθυνόμενο) γράφημα $G(V, E)$ **συνεκτικό** αν για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, υπάρχει $u - v$ μονοπάτι.
 - Μη-συνεκτικό γράφημα αποτελείται από **συνεκτικές συνιστώσες**: μεγιστικά (maximal) συνεκτικά υπογραφήματα.
 - **Γέφυρα** (ακμή τομής): ακμή που αν αφαιρεθεί **αυξάνει** το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.
 - Ακμή γέφυρα αν δεν ανήκει σε κύκλο.
 - **Σημείο άρθρωσης** (κορυφή τομής): κορυφή που αν αφαιρεθεί **αυξάνει** το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.



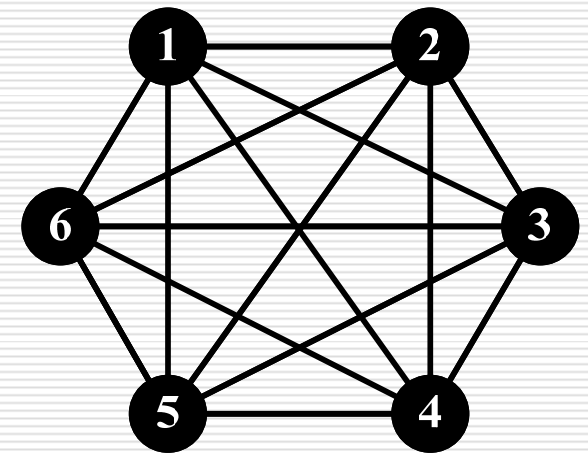
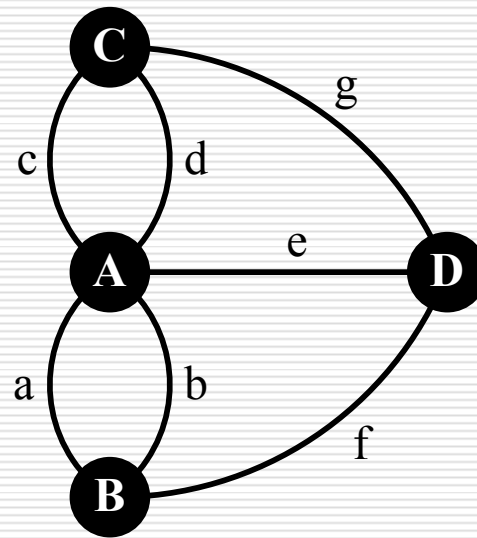
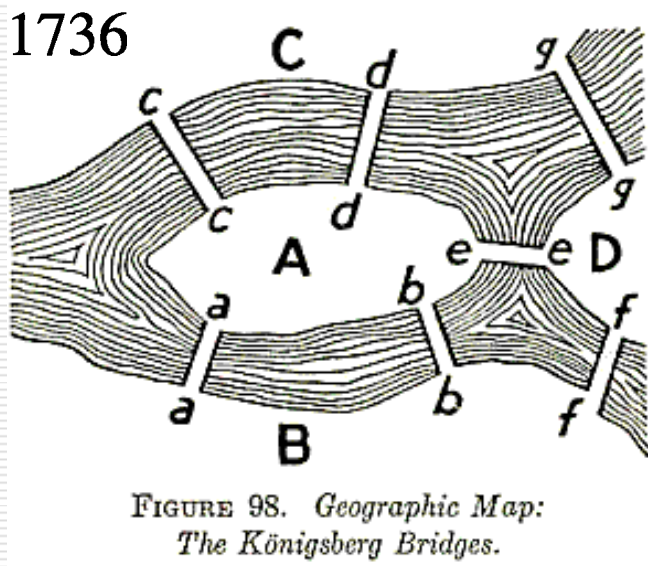
ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- (Κατευθυνόμενο) γράφημα $G(V, E)$ **ισχυρά συνεκτικό** αν $\forall u, v \in V$, υπάρχουν $u - v$ και $v - u$ μονοπάτια.
 - Για κάθε ζευγάρι κορυφών ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, υπάρχει κύκλος που τις περιλαμβάνει.
 - Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, διαμερίζεται σε **ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες**:
 - Μεγιστικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα.



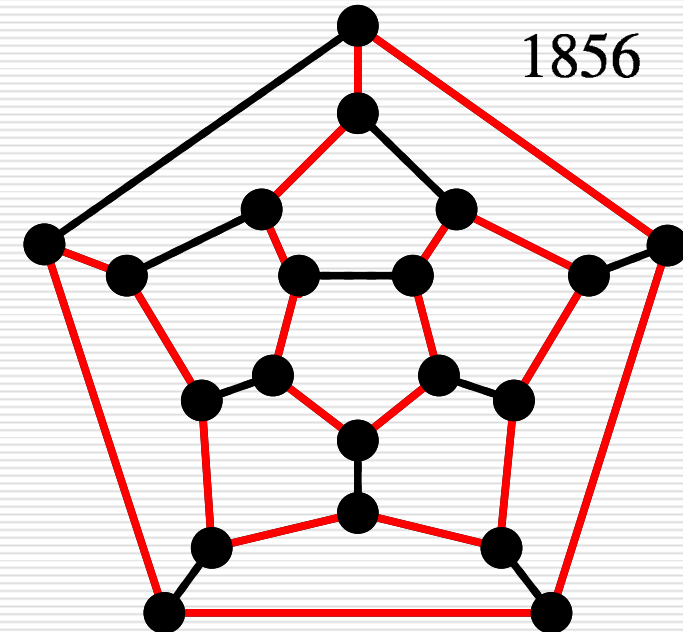
Κύκλος Euler

- Κλειστή μονοκονδυλιά που διέρχεται:
 - από κάθε ακμή 1 φορά, και
 - από κάθε κορυφή τουλάχιστον 1 φορά.
- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλο Euler ανν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.



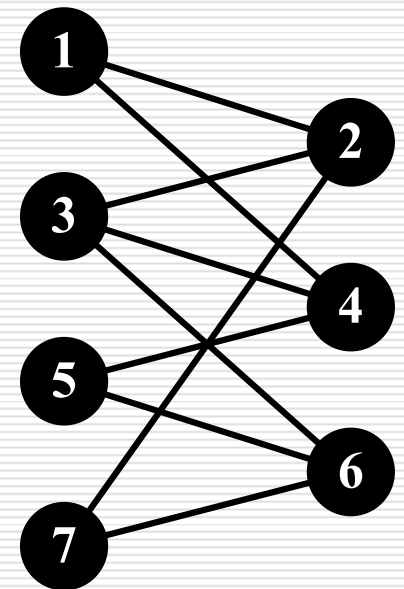
Κύκλος Hamilton

- (Απλός) κύκλος που διέρχεται από όλες τις κορυφές.
 - Διέρχεται από κάθε κορυφή 1 φορά.
 - Μπορεί να μην διέρχεται από κάποιες ακμές.
- Δεν είναι γνωστή ικανή και αναγκαία συνθήκη!
- Ικανές συνθήκες ώστε $G(V, E)$ έχει κύκλο Hamilton:
 - $\forall v \in V, \deg(v) \geq |V|/2$ (Θ. Dirac).
 - $\forall u, v \in V, \deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ (Θ. Ore).
- Αναγκαίες συνθήκες για ύπαρξη κύκλου Hamilton σε γραφήμα G :
 - G δεν έχει γέφυρα ή σημείο άρθρωσης.



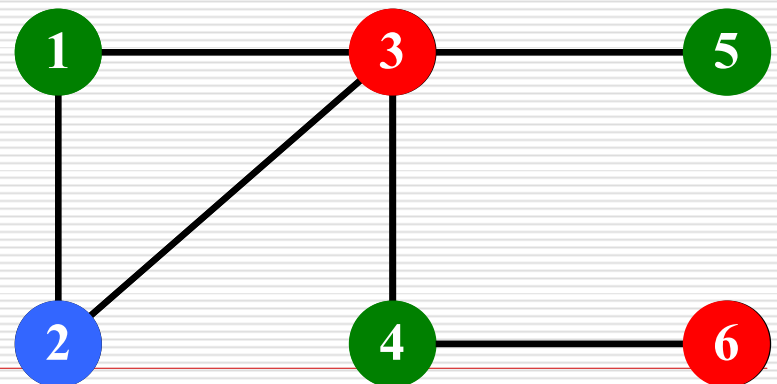
Διμερές Γράφημα

- **Ανεξάρτητο σύνολο:** σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- Υπάρχει διαμέριση κορυφών σε **δύο ανεξάρτητα σύνολα**.
 - $G(X, Y, E)$: X και Y ανεξάρτητα σύνολα, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών X και Y .
 - G διμερές αν $\chi(G) \leq 2$.
 - G διμερές αν **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
 - Κύκλος n κορυφών C_n : διμερές αν **n άρτιος**.
- Πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$:
 - Δύο ανεξάρτητα σύνολα με n και m κορυφές.
 - Όλες οι **$n \cdot m$ ακμές** μεταξύ τους.
 - Π.χ. $K_{3,3}$ έχει 9 ακμές.



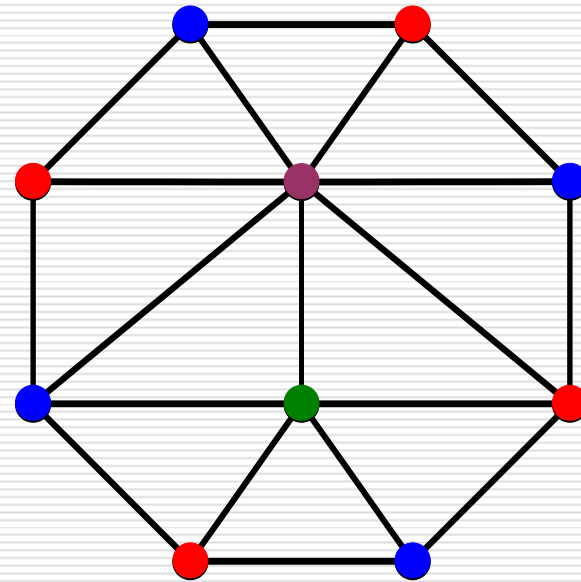
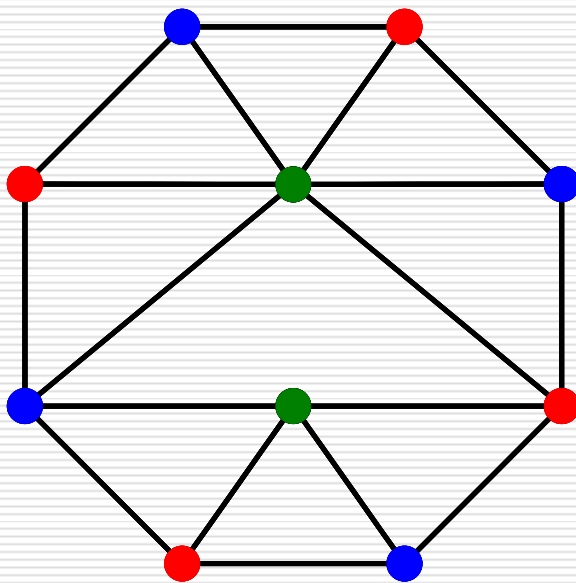
Χρωματικός Αριθμός

- **Ανεξάρτητο σύνολο:** σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- **k-μερές γράφημα:** κορυφές του διαμερίζονται σε k ανεξάρτητα σύνολα.
 - Ενδιαφέρει **ελάχιστο k** για το οποίο γράφημα G είναι k-μερές.
 - Αυτό ταυτίζεται με **χρωματικό αριθμό $\chi(G)$** γραφήματος G.
- **Χρωματικός αριθμός:** ελάχιστο πλήθος χρωμάτων για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος.
 - Κορυφές ίδιου χρώματος: ανεξάρτητο σύνολο.
 - Αν G περιέχει K_m , $\chi(G) \geq m$
 - $\chi(G) \leq \Delta + 1$



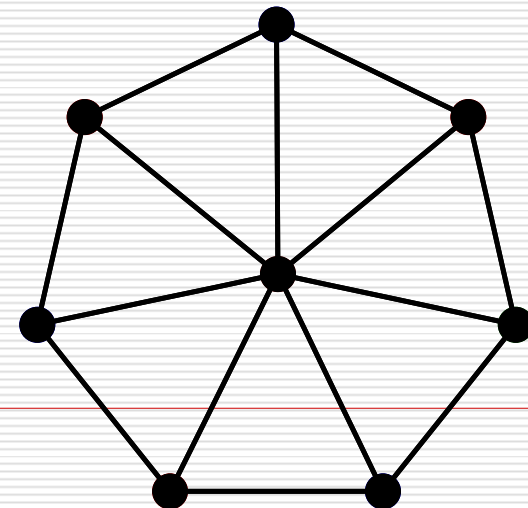
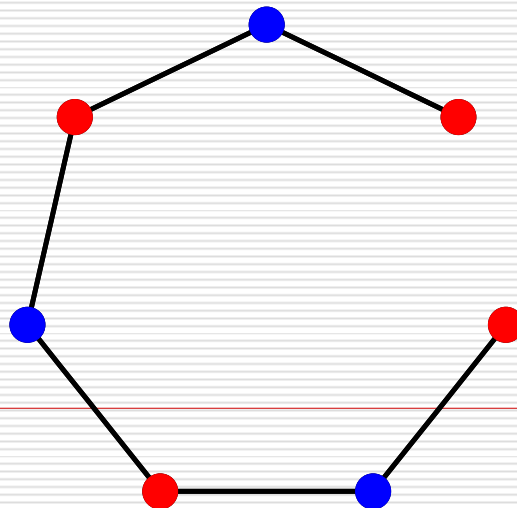
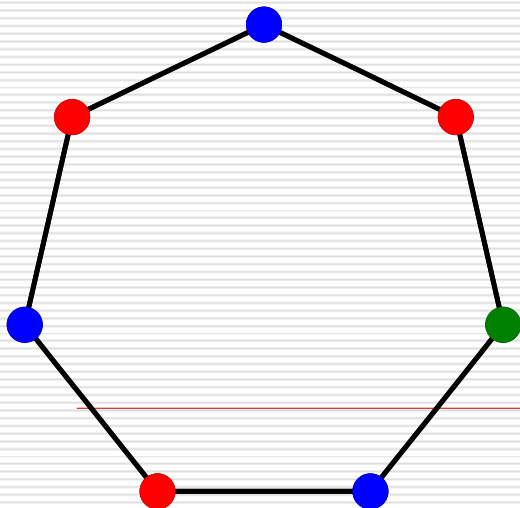
Χρωματικός Αριθμός

- **Χρωματικός αριθμός:** ελάχιστο πλήθος χρωμάτων για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος.
 - Κορυφές ίδιου χρώματος: ανεξάρτητο σύνολο.



Χρωματικός Αριθμός

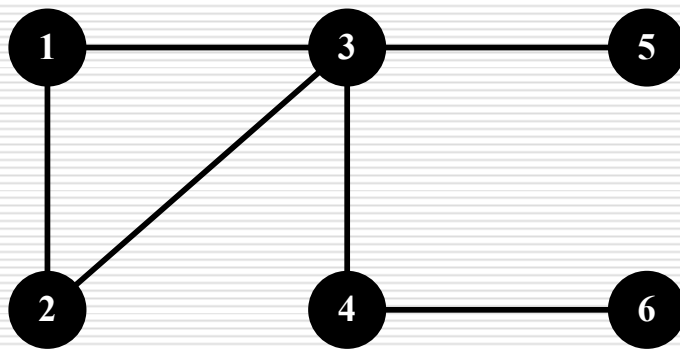
- Χρωματικά **k-κρίσιμο** γράφημα G : $\chi(G) = k$ και για κάθε ακμή e , $\chi(G-e) = k-1$.
 - K_n n-κρίσιμο: $\chi(K_n) = n$ και για κάθε e , $\chi(K_n - e) = n-1$.
 - Απλός κύκλος C_n , n άρτιος: $\chi(C_n) = 2$ και όχι 2-κρίσιμο.
 - Απλός κύκλος C_n , n περιττός: $\chi(C_n) = 3$ και 3-κρίσιμο.
 - Τροχός W_n , n άρτιος: $\chi(W_n) = 3$ και όχι 3-κρίσιμο.
 - Τροχός W_n , n περιττός: $\chi(W_n) = 4$ και 4-κρίσιμο.



Αναπαράσταση Γραφημάτων

□ ... με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$

- Αν έχουμε βάρη, $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- (Απλό) μη κατευθυνόμενο: **συμμετρικός**, διαγώνιος 0.
- Άθροισμα στοιχείων γραμμής (στήλης): βαθμός κορυφής.
- Χώρος $\Theta(n^2)$.
- Άμεσος έλεγχος για ύπαρξη ακμής.



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Πίνακας Γειτνίασης

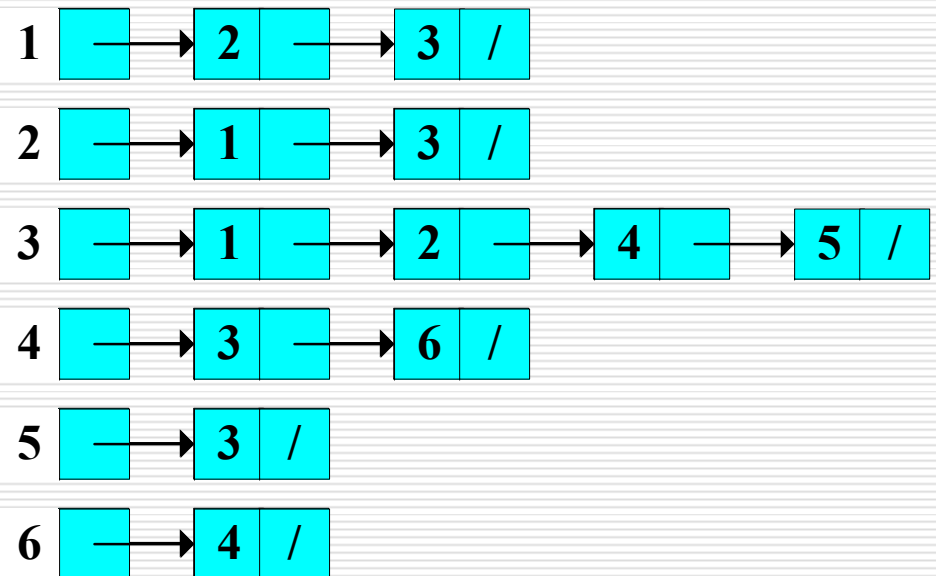
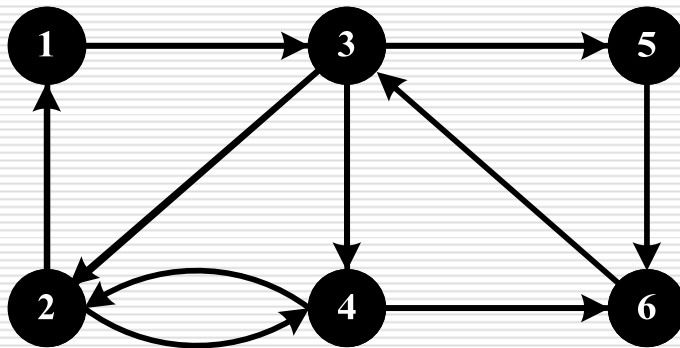
- $A^k[u_i, u_j]$ = #διαδρομών $u_i - u_j$ μήκους k .
 - Διαγώνιος τετραγώνου: $A^2[u_i, u_i]$ = βαθμός(u_i).
 - $A^3[u_i, u_i]$ = $2 \times$ #τριγώνων που συμμετέχει u_i .

- Ορίζουμε: $Y = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$

- $Y[u_i, u_j]$ = #διαδρομών $u_i - u_j$ μήκους $\leq n - 1$.
 - Μονοπάτια έχουν μήκος $\leq n - 1$, και διαδρομή ανν μονοπάτι.
 - Γράφημα **συνεκτικό** ανν **όλα** τα **στοιχεία** του Y **θετικά** (> 0).

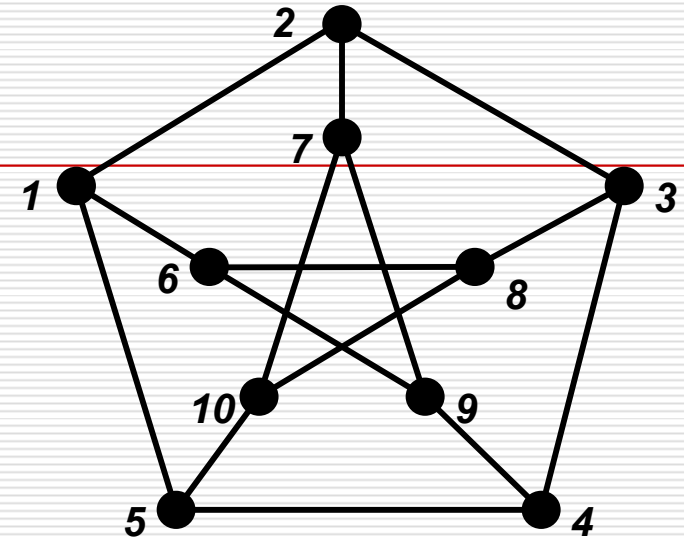
Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
 - Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους.
 - Χώρος $\Theta(m)$.
 - Έλεγχος για ύπαρξη ακμής σε χρόνο $O(\text{deg}(u))$.



Πίνακας Πρόσπτωσης

$$A[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

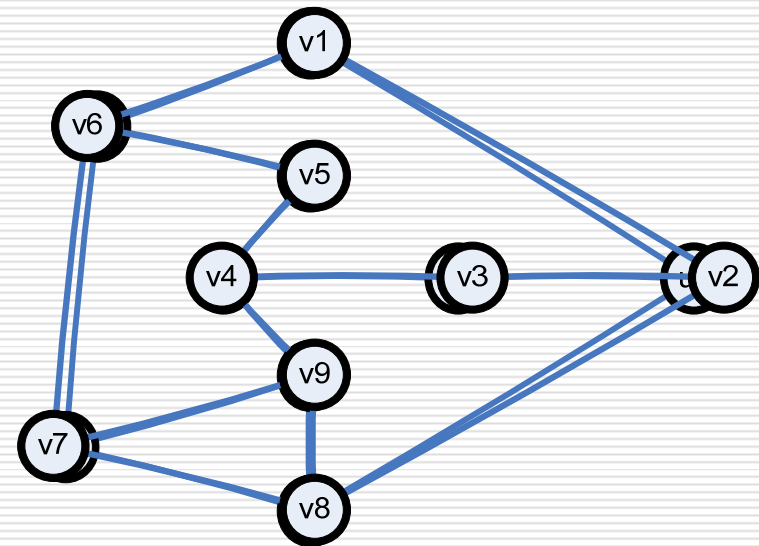
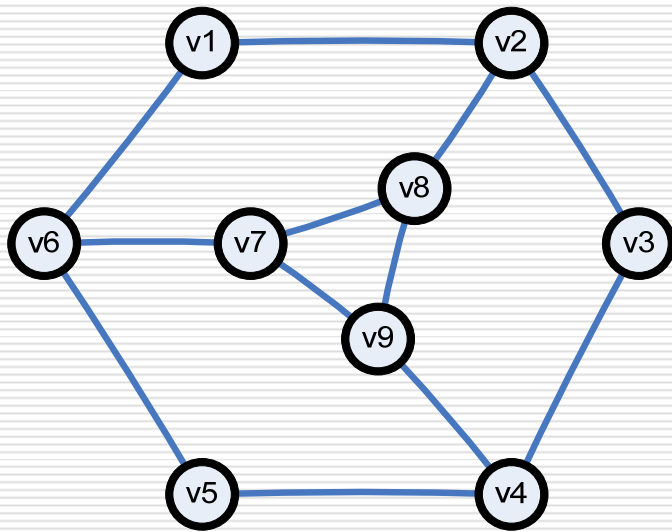


	1,2	1,5	1,6	2,3	2,7	3,4	3,8	4,5	4,9	5, 10	6,8	6,9	7,9	7, 10	8, 10
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

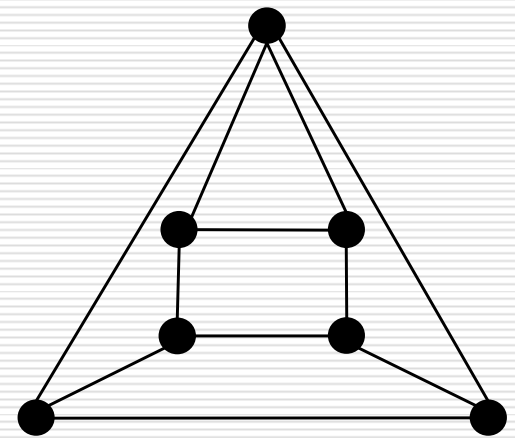
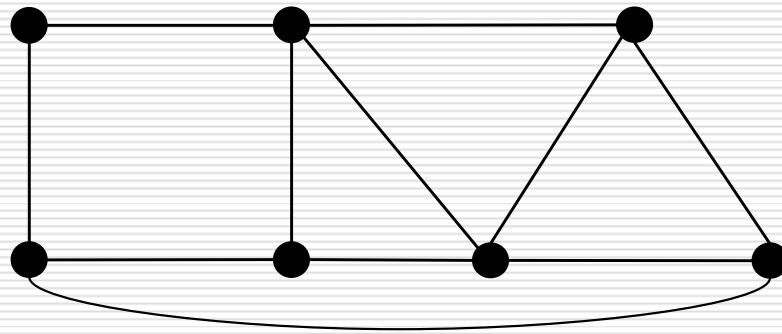
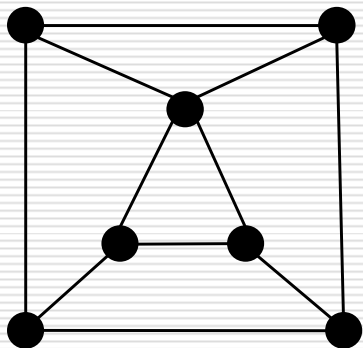
Ισομορφικά Γραφήματα

- Γραφήματα $G(V_G, E_G)$ και $H(V_H, E_H)$ είναι **ισομορφικά** αν υπάρχει **1-1 και επί** συνάρτηση $f: V_G \rightarrow V_H$ (**ισομορφισμός**) ώστε για κάθε $u, v \in V_G$, $\{u, v\} \in E_G$ αν $\{f(u), f(v)\} \in E_H$
 - Υπάρχει **αντιστοιχία κορυφών** που διατηρεί τη **γειτονικότητα**.
 - Ισομορφισμός αποτελεί **σχέση ισοδυναμίας**.
- **Αναλλοίωτη ιδιότητα:** ισομορφικά γραφήματα «συμφωνούν».
 - Όλες οι σημαντικές ιδιότητες: **#κορυφών**, **#ακμών**, **βαθμοί**, **συνεκτικότητα**, **κύκλος Euler και Hamilton**, **χρωματικός αριθμός**, ...
- Πως αποδεικνύω ότι δύο γραφήματα ισομορφικά:
 - Βρίσκω ισομορφισμό και ελέγχω ότι διατηρεί γειτονικότητα.
 - Αποδεικνύω (με ισομορφισμό) ότι τα συμπληρωματικά τους είναι ισομορφικά.

Ισομορφικά Γραφήματα



Ισομορφικά Γραφήματα

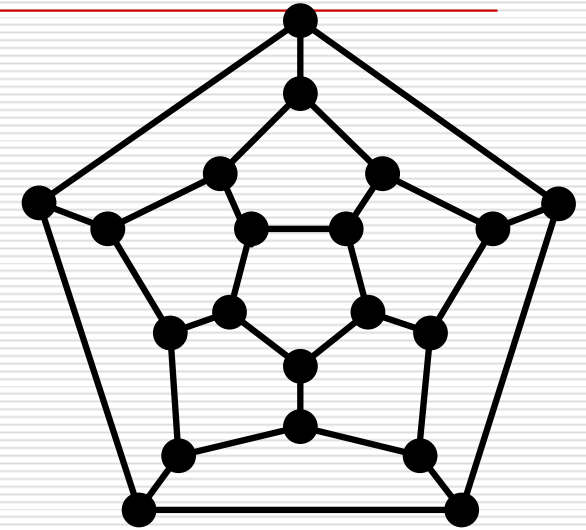


Ισομορφικά Γραφήματα

- Πως αποδεικνύω ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά:
 - Βρίσκω μια αναλλοίωτη ιδιότητα στην οποία «διαφωνούν».
- **Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα:** ισομορφικό με το συμπληρωματικό του.
 - Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα έχει $n(n-1)/4$ ακμές.
 - Αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα υπάρχουν μόνο αν n ή $n-1$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

Επίπεδα Γραφήματα

- **Επίπεδο** ένα γράφημα που **μπορεί** να ζωγραφιστεί στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.
- Θεώρημα 4 χρωμάτων:
 - Επίπεδο γράφημα έχει **χρωματικό αριθμό** ≤ 4 .
- Επίπεδη αποτύπωση ορίζει **όψεις** (faces).
 - Περιοχή επιπέδου που ορίζεται από (απλό) κύκλο και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερες όψεις.
 - **Εσωτερικές** και **εξωτερική** όψη.
 - $f = \#$ όψεων επίπεδου γραφήματος.
- Τύπος του Euler για συνεκτικά επίπεδα γραφ.: $n + f = m + 2$
 - $\#$ όψεων είναι **αναλλοίωτη ιδιότητα**, δεν εξαρτάται από αποτύπωση!



Επίπεδα Γραφήματα

- Μέγιστος αριθμός ακμών απλού επίπεδου γραφήματος.
 - Απλό: κάθε όψη ορίζεται από τουλάχιστον 3 ακμές.
 - Κάθε ακμή «ανήκει» σε μία ή δύο όψεις:
 - Αν ανήκει σε κύκλο: σύνορο δύο όψεων.
 - Διαφορετικά, «ανήκει» σε μία όψη.
 - (Κάθε ακυκλικό γράφημα είναι επίπεδο με μία όψη, την εξωτερική).

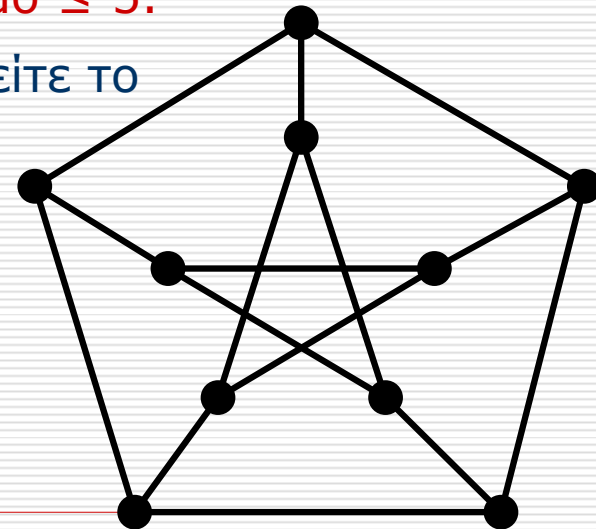
$$3f \leq \sum_{f \in \text{όψεις}} \# \text{ακμών}(f) \leq 2m \Rightarrow f \leq 2m/3$$

$$m + 2 = n + f \leq n + 2m/3 \Rightarrow m/3 \leq n - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

- Υπάρχει συνεκτικό απλό επίπεδο γράφημα με $m = 3n - 6$.
 - Όλες του οι όψεις είναι τρίγωνα.
- Απλό **διμερές** επίπεδο γράφημα: $m \leq 2n - 4$.

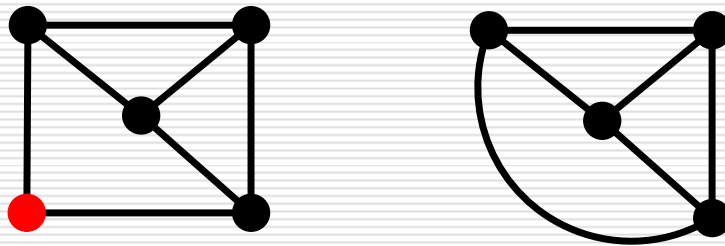
Επίπεδα Γραφήματα

- Άρα αν απλό γράφημα έχει $m > 3n-6$ ($m > 2n-4$ αν διμερές), **δεν** είναι **επίπεδο**.
- Τα K_5 και $K_{3,3}$ **δεν** είναι **επίπεδα**.
- Το **συμπληρωματικό** του γραφ. **Petersen** **δεν** είναι **επίπεδο**.
- Απλό επίπεδο γράφημα περιέχει κορυφή βαθμού 5.
 - Π.χ. χρησιμοποιείται για να δείξουμε **επαγωγικά** ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει **χρωματικό αριθμό** ≤ 5 .
- Κάθε γράφημα G με $n \geq 11$ κορυφές, είτε το G είτε το **συμπληρωματικό** του **δεν** είναι **επίπεδο**.



Ομοιομορφικά Γραφήματα

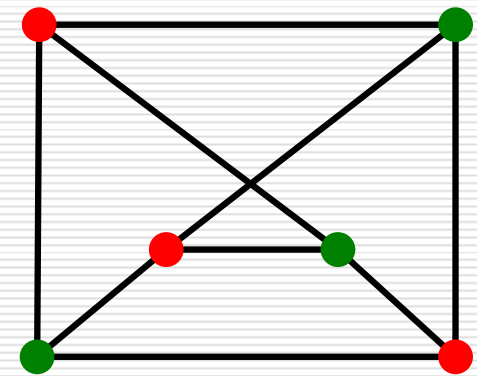
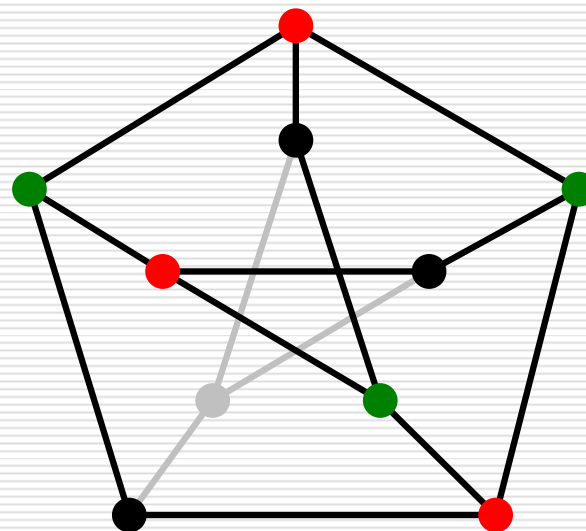
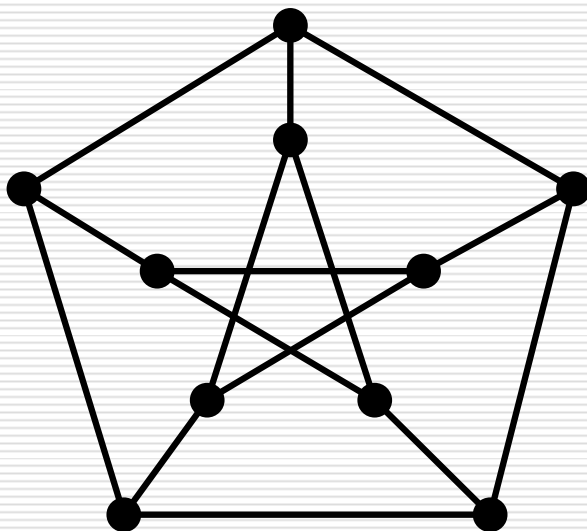
- **Απλοποίηση σειράς:** απαλοιφή κορυφών βαθμού 2 (δεν επηρεάζουν επιπεδότητα).



- Γραφήματα G και H **ομοιομορφικά** αν μπορούν να **καταλήξουν** **ισομορφικά** με διαδοχική εφαρμογή **απλοποιήσεων σειράς**.
 - Ομοιομορφικά μπορούν να «διαφωνούν» σε αναλλοίωτες ιδιότητες, αλλά «συμφωνούν» σε **επιπεδότητα**.
 - Ομοιομορφικά «συμφωνούν» σε **κύκλο Euler** και **κύκλο Hamilton**;

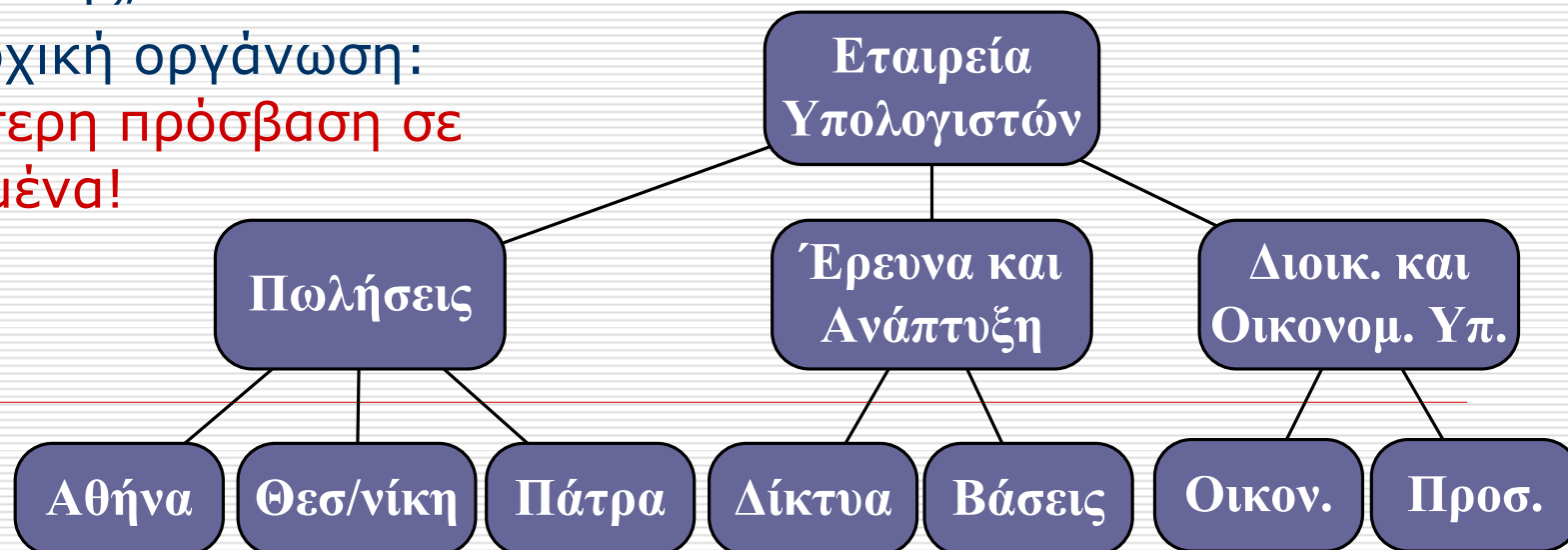
Θεώρημα Kuratowski

- **Θ. Kuratowski:** Γράφημα επίπεδο αν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με K_5 ή $K_{3,3}$.
 - Ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο αν μπορούμε με απλοποιήσεις (διαγραφές κορυφών και ακμών, απλοποιήσεις σειράς) να καταλήξουμε σε K_5 ή $K_{3,3}$.



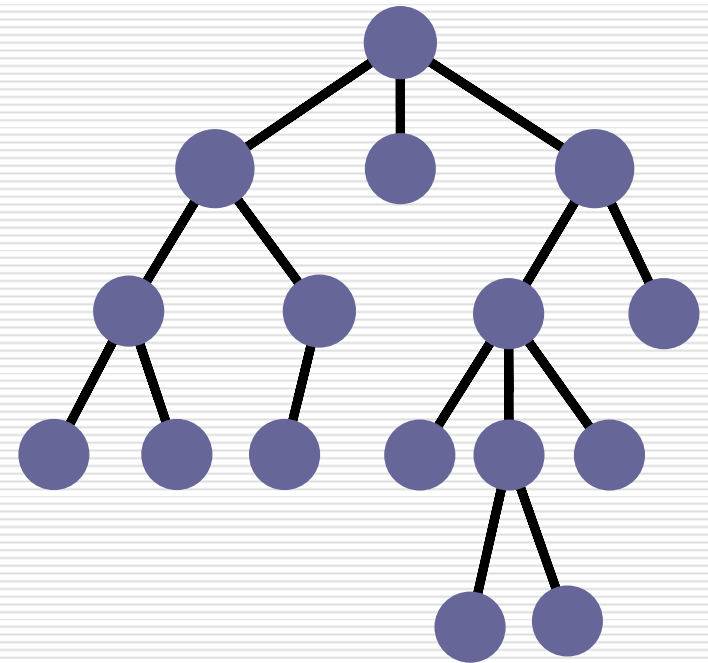
Δέντρα

- **Δέντρο:** μοντέλο **ιεραρχικής δομής**.
 - Αναπαράσταση (**ιεραρχικών**) σχέσεων: προγόνου-απογόνου, προϊσταμένου-υφισταμένου, όλου-μέρους, ...
- Εφαρμογές:
 - Γενεαλογικά δέντρα.
 - Οργανόγραμμα επιχείρησης, ιεραρχία διοίκησης.
 - User interfaces, web sites, module hierarchy, δέντρα απόφασης, ...
 - Ιεραρχική οργάνωση:
ταχύτερη πρόσβαση σε δεδομένα!



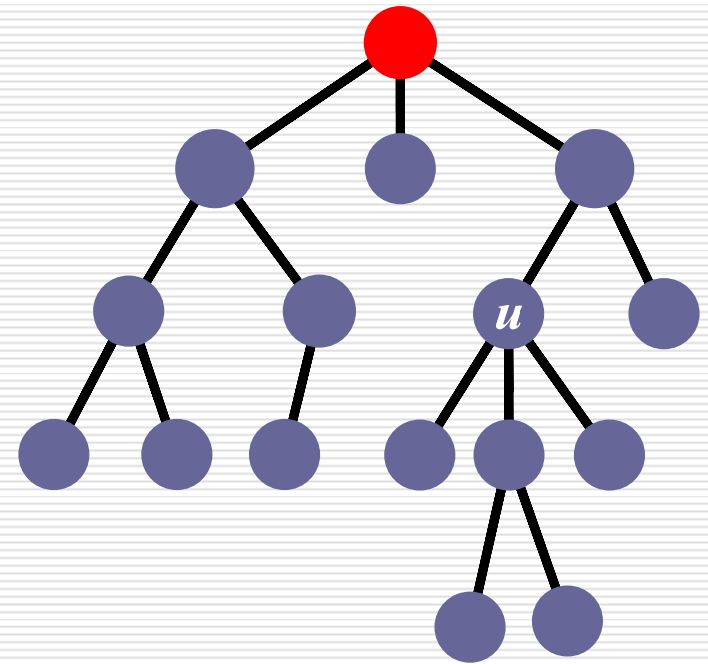
Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό**.
- Τα παρακάτω είναι **ισοδύναμα** για κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$:
 - G είναι **δέντρο**.
 - Κάθε ζευγάρι κορυφών του G συνδέεται με **μοναδικό μονοπάτι**.
 - G **ελαχιστικά συνεκτικό**.
 - G **συνεκτικό** και $|E| = |V| - 1$.
 - G **ακυκλικό** και $|E| = |V| - 1$.
 - G **μεγιστικά ακυκλικό**.



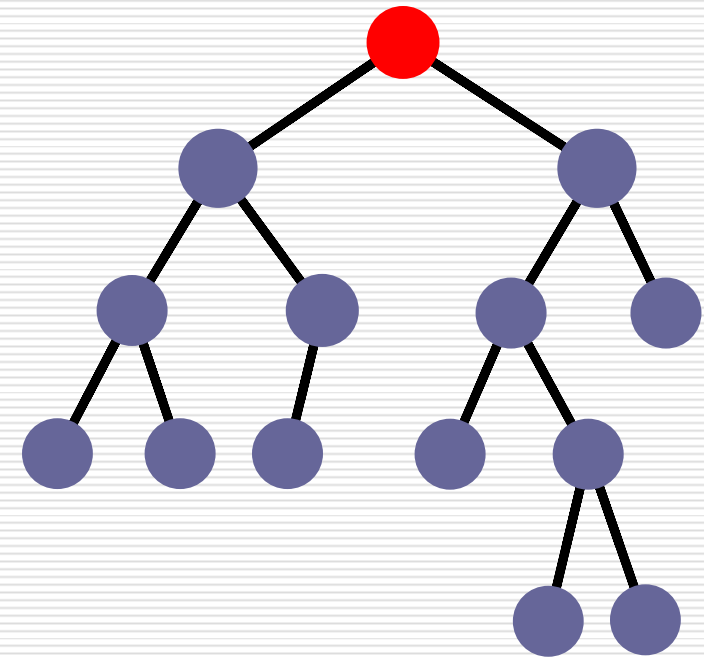
Δέντρα: Ορολογία

- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό**.
- Δέντρο με **n κορυφές** έχει **$m = n - 1$ ακμές**.
- **Ρίζα**: κόμβος χωρίς πρόγονο.
 - Δέντρο με **ρίζα** : **ιεραρχία**
- **Φύλλο**: κόμβος χωρίς απογόνους.
- **Πρόγονοι u** : κόμβοι στο (μοναδικό) μονοπάτι u προς ρίζα.
- **Απόγονοι u** : κόμβοι που έχουν ως πρόγονο το u .
- **Υποδέντρο u** : Δέντρο αποτελούμενο από u και απόγονούς του.



Δέντρα: Ορολογία

- **Επίπεδο u :** μήκος μονοπατιού από u προς ρίζα.
- **Ύψος:** μέγιστο επίπεδο κόμβου (φύλλου).
 - Μέγιστη απόσταση από ρίζα.
- **Βαθμός u :** αριθμός παιδιών u .
- **Δυαδικό δέντρο :** κάθε κορυφή ≤ 2 **παιδιά**
 - **Αριστερό** και **δεξιό**.
- Κάθε **υποδέντρο** είναι δυαδικό δέντρο.



Δυαδικά Δέντρα

□ **Ύψος h** :

$$h+1 \leq \# \text{κορυφών} \leq 2^{h+1} - 1$$

■ $h+1$ επίπεδα, ≥ 1 κορ. / επίπ.

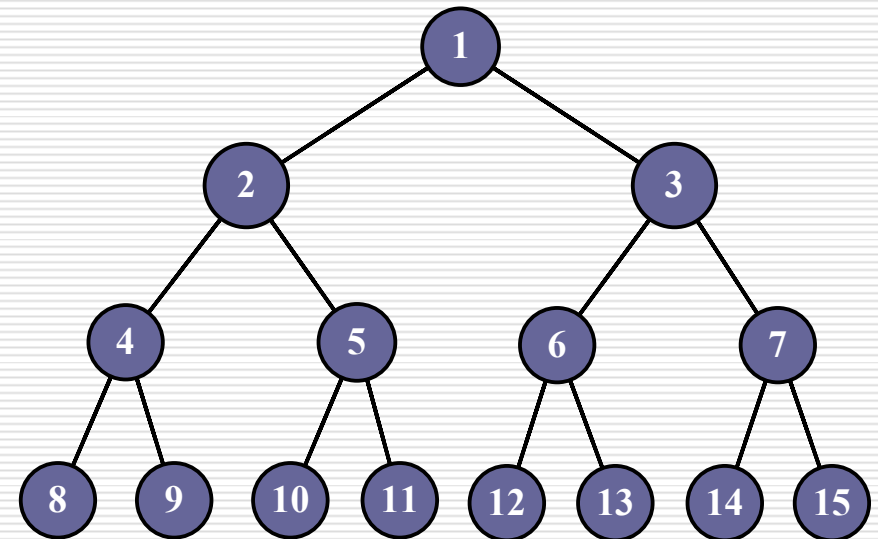
■ $\leq 2^i$ κορυφές στο επίπεδο i .

$$1 + 2 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

□ **#κορυφών n** :

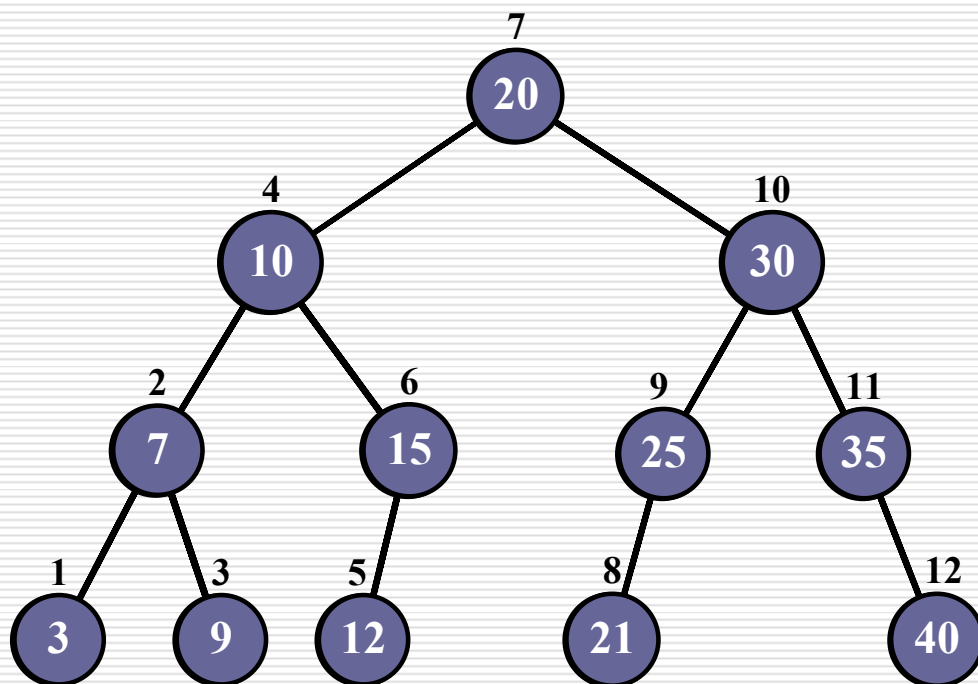
$$\log_2(n+1) - 1 \leq h \leq n - 1$$

□ **Πλήρες** (complete) : $n = 2^{h+1} - 1$



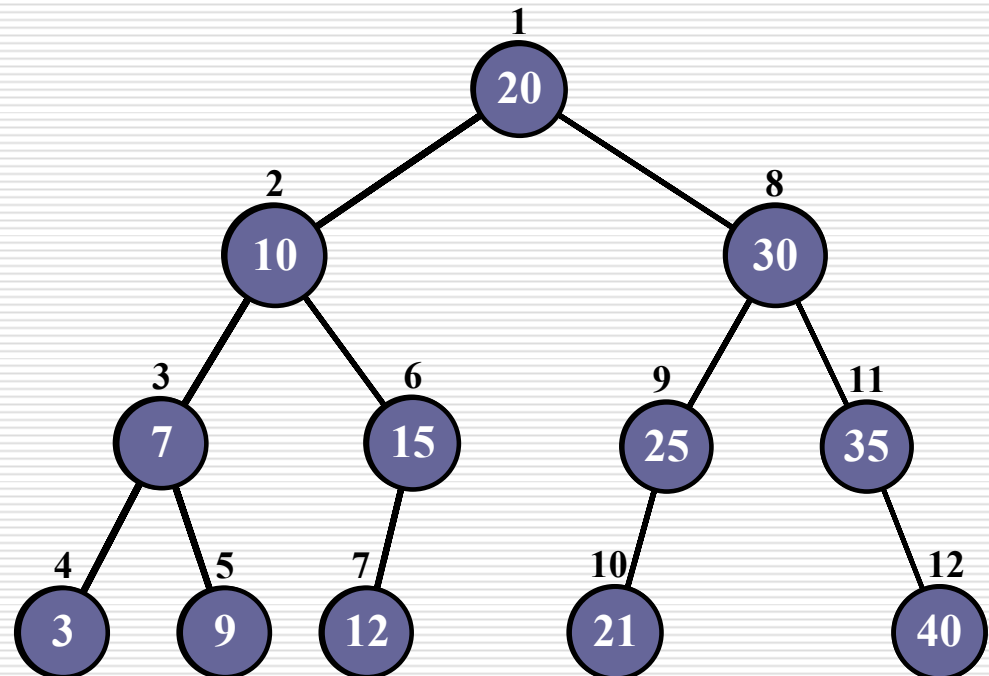
Inorder

- **Ενδο**-διατεταγμένη (inorder) διέλευση:
 - Αριστερό – Ρίζα – Δεξί.
 - Κόμβος εξετάζεται **μετά** από κόμβους αριστερού υποδέντρου και **πριν** από κόμβους δεξιού υποδέντρου.



Preorder

- Προ-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
 - Ρίζα – Αριστερό – Δεξί.
 - Κόμβος εξετάζεται **πριν** από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.



Postorder

- **Μετα**-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
 - Αριστερό – Δεξί – Ρίζα
 - Κόμβος εξετάζεται **μετά** από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.

