Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 13/2/2014

Άσκηση 1: Μέτρηση Συντομότερων Μονοπατιών

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με μοναδιαία μήκη ακμών, και μια αρχική κορυφή $s \in V$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που για κάθε κορυφή $v \in V \setminus \{s\}$, υπολογίζει το πλήθος των διαφορετικών συντομότερων $s - v$ μονοπατιών. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Μπορείτε να γενικεύσετε τον αλγόριθμό σας (ώστε να παραμείνει γραμμικού χρόνου) αν οι ακμές έχουν ακέραια μήκη στο σύνολο $\{1, \dots, k\}$, όπου k μια μικρή θετική σταθερά;

Άσκηση 2: Κατευθυνόμενο Μονοπάτι Hamilton σε DAG

Θεωρούμε ένα ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$, και θέλουμε να διαπιστώσουμε αν το G περιέχει κατευθυνόμενο μονοπάτι Hamilton, δηλαδή ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι που διέρχεται από όλες τις κορυφές του G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για αυτό το πρόβλημα. Αν το G περιέχει μονοπάτι Hamilton, ο αλγόριθμός σας πρέπει να το υπολογίζει. Διαφορετικά, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει κάποιο (όσο το δυνατόν απλούστερο) "πιστοποιητικό" από το οποίο εύκολα διαπιστώνεται ότι το G δεν περιέχει μονοπάτι Hamilton. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας, καθώς και την ορθότητα του "πιστοποιητικού" για την περίπτωση που το G δεν περιέχει μονοπάτι Hamilton.

Άσκηση 3: Βελτιωμένος Αλγόριθμος για Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές, και θετικά βάρη w στις ακμές. Βασιζόμενοι σε αλγόριθμους που παρουσιάσαμε στο μάθημα, να διατυπώσετε αλγόριθμο που υπολογίζει ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G σε χρόνο $O(m \log \log n)$.

Άσκηση 4: Υπολογισμός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου με Διαγραφή Ακμών

Σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές, και θα διατυπώσουμε αλγόριθμο που υπολογίζει ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του G με διαδοχική διαγραφή κατάλληλα επιλεγμένων ακμών.

(α) Έστω C ένας κύκλος του G, και έστω e μια ακμή μέγιστου βάρους του C. Να δείξετε ότι υπάρχει ΕΣΔ του G που δεν περιέχει την e.

(β) Θεωρούμε τον αλγόριθμο που εξετάζει διαδοχικά τις ακμές του G σε φθίνουσα σειρά βάρους, και σε κάθε επανάληψη, διαγράφει την εξεταζόμενη ακμή e αν αυτή ανήκει σε κύκλο (που σχηματίζεται από την e και ακμές που δεν έχουν ακόμη διαγραφεί). Να αποδείξετε την ορθότητα αυτού του αλγόριθμου. Να δείξετε δηλαδή (i) ότι ο αλγόριθμος πράγματι υπολογίζει ένα συνδετικό δέντρο του G, και (ii) ότι αυτό έχει πράγματι ελάχιστο συνολικό βάρος.

(γ) Έστω ότι το γράφημα $G(V, E, w)$ είναι *σχεδόν-δέντρο*, με την έννοια ότι $|E| = |V| + k$, για κάποια (σχετικά μικρή) θετική σταθερά k. Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* για τον υπολογισμό ενός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου σε ένα τέτοιο γράφημα G.

Άσκηση 5: Απαραίτητες (και Μη Απαραίτητες) Ακμές

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές, και θετικά βάρη w στις ακμές (τα βάρη κάποιων ακμών μπορεί να είναι ίδια).

(α) Έστω T ένα συνδετικό δέντρο του G για το οποίο γνωρίζουμε ότι κάθε ακμή $e \in T$ εντάσσεται σε κάποιο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G. Αρκεί αυτό για να συμπεράνουμε ότι το T αποτελεί ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την απάντησή σας.

(β) Συμβολίζουμε με $\mathrm{MST}(G)$ το συνολικό βάρος ενός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου του G. Μια ακμή $e \in E$ θεωρείται *απαραίτητη* για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο αν η αφαίρεσή της οδηγεί σε αύξηση του βάρους του, δηλ. αν $\mathrm{MST}(G) < \mathrm{MST}(G - e)$. Να αποδείξετε ότι:

1. Μια ακμή e είναι απαραίτητη αν και μόνο αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που την διασχίζει, δηλ. για κάθε ακμή $e' = \{u, v\}$, $e' \neq e$, με $u \in S$ και $v \in V \setminus S$, ισχύει ότι $w(e) < w(e')$.
2. Μια ακμή e είναι απαραίτητη αν και μόνο αν για κάθε κύκλο C που περιέχει την e, η e δεν αποτελεί ακμή μέγιστου βάρους του C, δηλ. υπάρχει ακμή $e' \in C$ με $w(e') > w(e)$.

(γ) Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* που αποφασίζει αν μια ακμή e του G είναι απαραίτητη για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(δ) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει όλες τις ακμές του G που είναι απαραίτητες για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι συγκρίσιμη με αυτή των αλγορίθμων που υπολογίζουν ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.