Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 6/3/2014

Άσκηση 1: Επιβεβαίωση και Αναπροσαρμογή Συντομότερων Μονοπατιών

Θεωρούμε ένα (ισχυρά συνεκτικό) κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές, και (ενδεχομένως αρνητικά) μήκη w στις ακμές. Συμβολίζουμε με $d(u, v)$ την απόσταση των κορυφών u και v στο G.

(α) Δίνονται n αριθμοί $\delta_1, \ldots, \delta_n$, όπου κάθε δ_k (υποτίθεται ότι) ισούται με την απόσταση $v_1 - v_k$ στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν τα $\delta_1, \ldots, \delta_n$ πράγματι ανταποκρίνονται στις αποστάσεις των κορυφών από την v_1, δηλαδή αν για κάθε $v_k \in V$, ισχύει ότι $\delta_k = d(v_1, v_k)$. Αν αυτό αληθεύει, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει και να επιστρέφει ένα Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών με ρίζα τη v_1.

(β) Υποθέτουμε ότι έχουμε υπολογίσει τις αποστάσεις $d(v_i, v_j)$ μεταξύ κάθε (διατεταγμένου) ζεύγους κορυφών $(v_i, v_j) \in V \times V$. Στη συνέχεια, το μήκος μιας ακμής $e = (x, y)$ μειώνεται σε $w'(x, y) < w(x, y)$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O(n^2)$ που αναπροσαρμόζει τις αποστάσεις μεταξύ όλων των κορυφών (εφόσον βέβαια η μείωση δεν δημιουργεί κύκλο αρνητικού μήκους!).

(γ) Τι αλλάζει, σε σχέση με το (β), αν το μήκος μιας ακμής $e = (x, y)$ αυξηθεί σε $w'(x, y) > w(x, y)$; Μπορείτε να επεκτείνετε τον αλγόριθμο του (β) σε αυτή την περίπτωση; Αν ναι, να περιγράψετε την επέκταση του αλγορίθμου, αν όχι, να εξηγήσετε συνοπτικά τις βασικές διαφορές / δυσκολίες.

Άσκηση 2: Σύστημα Ανισοτήτων

Έστω $x_1, \ldots, x_n$ ακέραιες μεταβλητές. Θεωρούμε ένα σύστημα S αποτελούμενο από m ανισότητες της μορφής $x_i - x_j \leq b_{ij}$, για κάποια $1 \leq i, j \leq n$, όπου τα b_{ij} είναι ακέραιοι αριθμοί. Το S είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχουν ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ που ικανοποιούν όλες τις ανισότητες του S.

(α) Να διατυπώσετε ένα κριτήριο για το αν το S είναι ικανοποιήσιμο (και να αποδείξετε την ορθότητα του κριτηρίου σας). Με βάση αυτό το κριτήριο, να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που διαπιστώνει αν το S είναι ικανοποιήσιμο ή όχι. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

(β) Να συμπληρώσετε τον αλγόριθμο του (α) ώστε αν το σύστημα S είναι ικανοποιήσιμο, να υπολογίζει αποδεκτές τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$, διαφορετικά να υπολογίζει ένα ελάχιστο (ως προς το πλήθος ανισοτήτων) υποσύστημα S' που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας στις δύο περιπτώσεις;

(γ) Θεωρούμε ότι κάθε ανισότητα $x_i - x_j \leq b_{ij}$ συνοδεύεται από ένα θετικό ακέραιο βάρος w_{ij}. Να διατυπώσετε αλγόριθμο που αν το σύστημα S δεν είναι ικανοποιήσιμο, υπολογίζει ένα ελάχιστου συνολικού βάρους υποσύστημα S' που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

(δ) Να διατυπώσετε το πρόβλημα του (γ) ως πρόβλημα απόφασης, και να αποφανθείτε αν αυτό ανήκει στην κλάση $\mathbf{P}$ ή είναι $\mathbf{NP}$-πλήρες. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τον ισχυρισμό σας.

Άσκηση 3: Επιβεβαίωση και Αναπροσαρμογή Μέγιστης Ροής

Θεωρούμε ένα (κατευθυνόμενο) $s - t$ δίκτυο $G(V, E, c)$ με n κορυφές, m ακμές, και (θετικές) ακέραιες χωρητικότητες c στις ακμές.

(α) Δίνεται μια ροή f που (υποτίθεται ότι) αποτελεί μια μέγιστη ροή στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν η f αποτελεί πράγματι μια μέγιστη ροή στο G. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Έστω ότι η f αποτελεί μια μέγιστη ροή στο G, αλλά ανακαλύπτουμε ότι η πραγματική χωρητικότητα μια ακμής e είναι μικρότερη κατά k μονάδες, $1 \leq k \leq c_e$, από τη χωρητικότητα c_e που είχαμε θεωρήσει αρχικά. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που (εφόσον χρειάζεται) τροποποιεί την f σε μία μέγιστη ροή f' για το δίκτυο G' που προκύπτει από το G θέτοντας $c'_e = c_e - k$. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού μιας μέγιστης ροής εξ' αρχής.

(γ) Λόγω μιας φυσικής καταστροφής στο t, πρέπει να διακόψουμε τη λειτουργία του δικτύου. Επειδή όμως η πλήρης διακοπή της ροής από το s στο t για σημαντικό χρονικό διάστημα θα προκαλούσε την καταστροφή των αγωγών - ακμών του δικτύου, πρέπει να διατηρήσουμε μια ελάχιστη ροή ℓ_e σε κάθε ακμή e. Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε την ελάχιστη ροή g για την οποία ισχύει ότι $c_e \geq g_e \geq \ell_e$ σε κάθε ακμή e. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που με είσοδο ένα $s-t$ δίκτυο $G(V, E, c, \ell)$, όπου c_e είναι η μέγιστη και ℓ_e είναι η ελάχιστη ροή που επιτρέπουμε σε κάθε ακμή, υπολογίζει μια ελάχιστη $s - t$ ροή g. Αν σας διευκολύνει, μπορείτε να θεωρήσετε ως δεδομένη τη μέγιστη ροή f στο αρχικό δίκτυο $G(V, E, c)$ και ότι $f_e \geq \ell_e$ σε κάθε ακμή e. Να προσπαθήσετε να βελτιστοποιήσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Να διατυπώσετε συνοπτικά το επιχείρημα που εξασφαλίζει ότι ο αλγόριθμός σας υπολογίζει πράγματι μια ελάχιστη $s - t$ ροή.

Άσκηση 4: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-Πλήρη:

3-Διαμέριση (3-Partition)

Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \dots, w_n\}$ με n θετικούς ακέραιους. Θεωρούμε ότι το συνολικό άθροισμα $w(A) = \sum_{i \in A} w_i$ των στοιχείων του A είναι πολλαπλάσιο του 3.

Ερώτηση: Υπάρχει διαμέριση του A σε σύνολα A_1, A_2, A_3 ώστε $w(A_1) = w(A_2) = w(A_3)$;

Συνδετικό Δέντρο Περιορισμένο ως προς τα Φύλλα

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ και μη κενό σύνολο κορυφών $L \subset V$.

Ερώτηση: Υπάρχει υπάρχει συνδετικό δέντρο (spanning tree) T του G τέτοιο ώστε το σύνολο των φύλλων του T να είναι υποσύνολο του L;

Σύνολο Κορυφών Ανάδρασης - Κατευθυνόμενο Γράφημα (Feedback Vertex Set - Directed)

Είσοδος: Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός k.

Ερώτηση: Υπάρχει στο G σύνολο κορυφών ανάδρασης $S \subseteq V$ με k ή λιγότερες κορυφές;

Ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ ονομάζεται *σύνολο κορυφών ανάδρασης* (feedback vertex set) αν το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση των κορυφών του S (και όλων των ακμών που προσπίπτουν σε κάποια από αυτές) δεν έχει κύκλο.

Συντομότερο Μονοπάτι με Περιορισμούς (Constraint Shortest Path)

Είσοδος: Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, m, t)$, όπου κάθε ακμή e έχει ένα ακέραιο κόστος διέλευσης $m(e) \geq 0$ και έναν ακέραιο χρόνο διέλευσης $t(e) \geq 0$, δύο κορυφές $a, b \in V$, και δύο ακέραιοι $M, T \geq 0$.

Ερώτηση: Υπάρχει $a - b$ μονοπάτι στο G με συνολικό κόστος διέλευσης μικρότερο ή ίσο του M και συνολικό χρόνο διέλευσης μικρότερο ή ίσο του T.