

Αναζήτηση Κατά Πλάτος

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

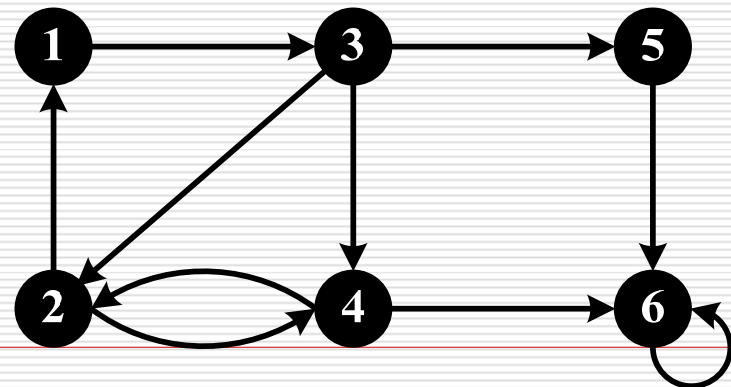
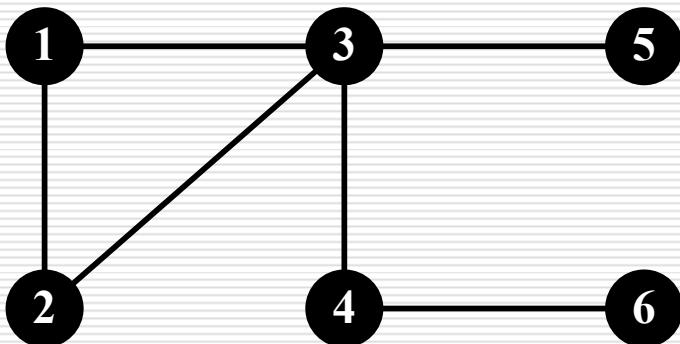
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



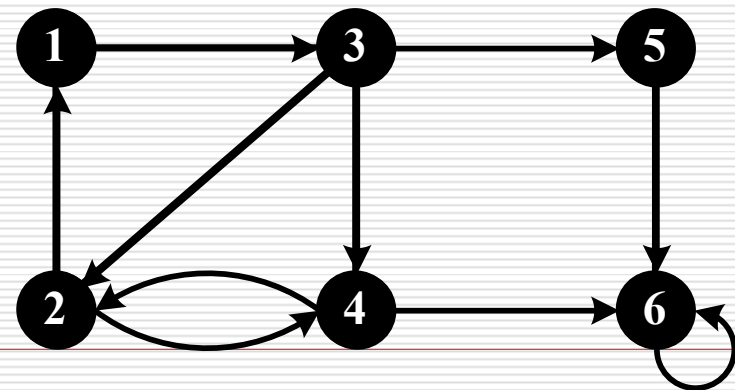
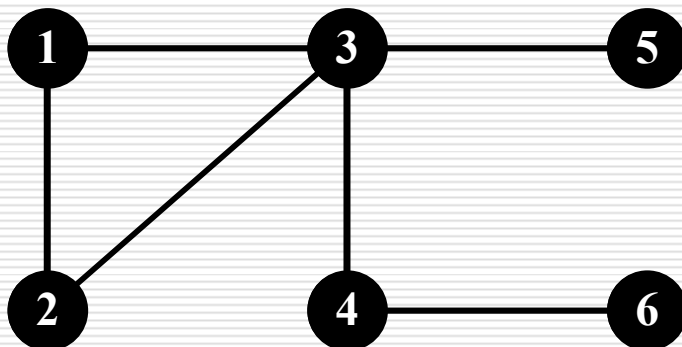
Γραφήματα

- Μοντελοποίηση πολλών σημαντικών προβλημάτων (π.χ. δίκτυα – συνεκτικότητα, διαδρομές, δρομολόγηση – ανάθεση πόρων, layouts, ...).
- Γράφημα $G(V, E)$: V κορυφές
 E ακμές (ζεύγη σχετιζόμενων κορυφών)
 - Τάξη $|V| = n$ και μέγεθος $|E| = m$.
 - Κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα, απλά μη-κατευθ.
 - Βάρη (μήκη) στις ακμές $G(V, E, w)$, $w : E \mapsto \mathbb{R}$



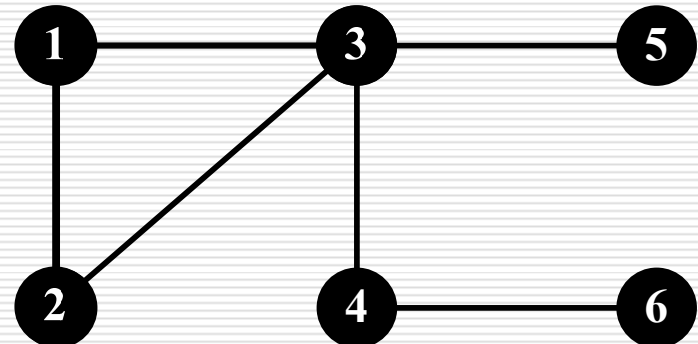
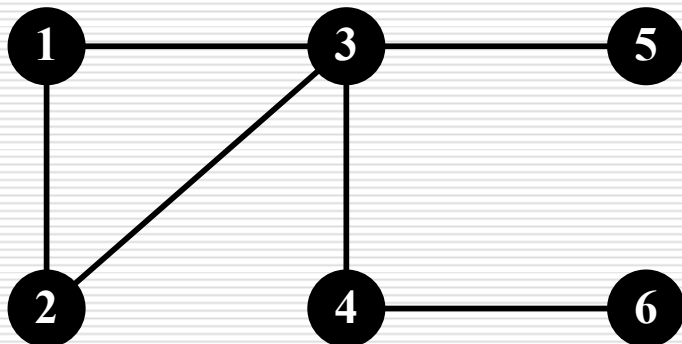
Γραφήματα

- **Βαθμός** κορυφής $\text{deg}(u)$: #ακμών εφραπτόμενων στη u .
 - Κατευθυνόμενα: **εισερχόμενος** και **εξερχόμενος** βαθμός.
 - Μη-κατευθυνόμενο $G(V, E)$: $\sum_{v \in V} \text{deg}(v) = 2|E|$
- Διαδρομή, μονοκονδυλιά, **μονοπάτι** (απλό).
- Κλειστή διαδρομή, κύκλωμα, **κύκλος** (απλός).
- **Απόσταση** $d(u, v)$ (χωρίς και με βάρη).
- **Συνεκτικό**: μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών.
- **Δέντρο**: ακυκλικό συνεκτικό γράφημα. **Δάσος**.



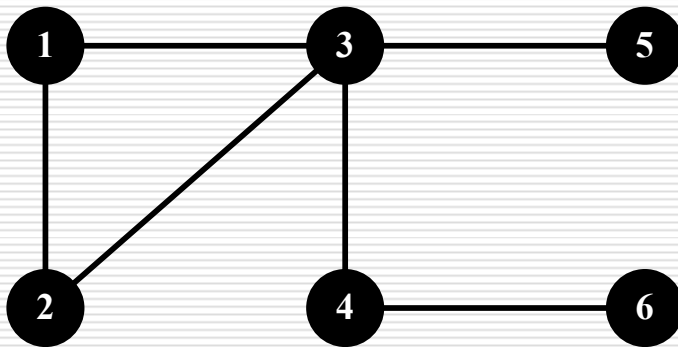
Υπο-Γραφήματα

- Υπογράφημα $G'(V', E')$ του $G(V, E)$ όταν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.
 - **Επικαλύπτον** (spanning) όταν $V' = V$, δηλ. έχει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος.
 - **Επαγόμενο** (induced) όταν $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$ δηλ. έχει όλες τις ακμές του αρχικού μεταξύ των επιλεγμένων κορυφών.



Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
- Αν έχουμε βάρη, $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- Μη-κατευθυνόμενο: **συμμετρικός** πίνακας.

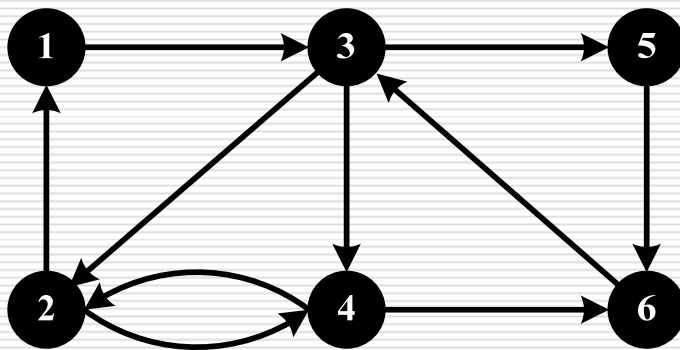


| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Αναπαράσταση Γραφημάτων

□ ... με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$

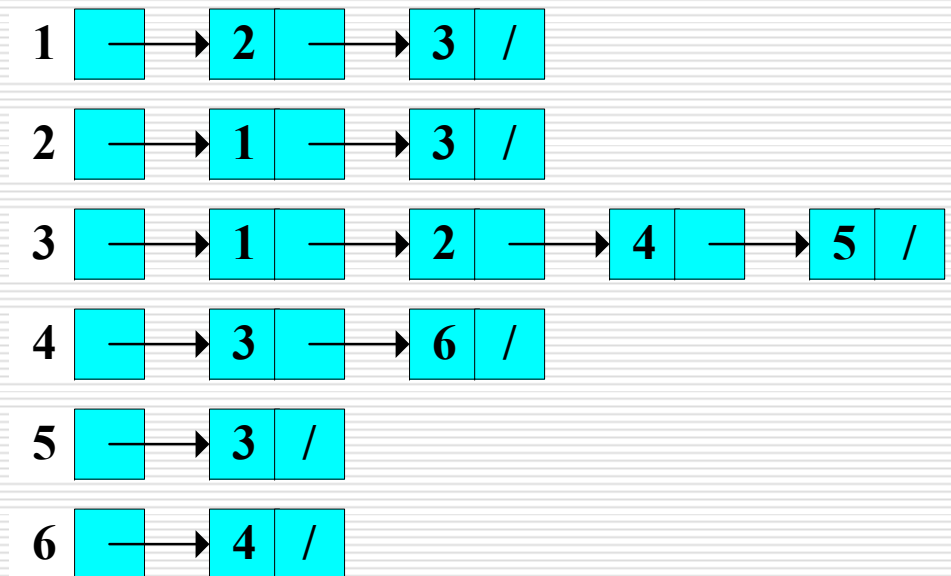
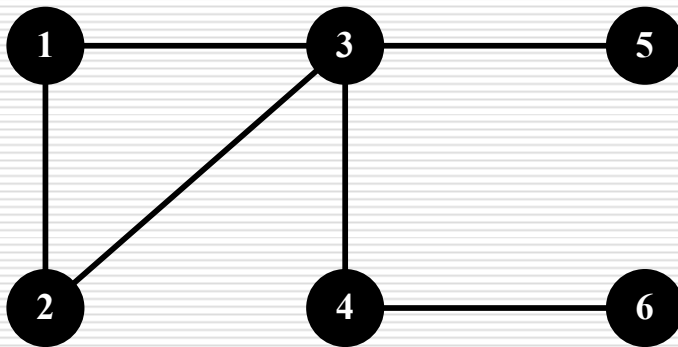
- Αν έχουμε βάρη, $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- Μη-κατευθυνόμενο: **συμμετρικός** πίνακας.
- Χώρος $\Theta(n^2)$.
- Άμεσος έλεγχος για ύπαρξη ακμής.



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

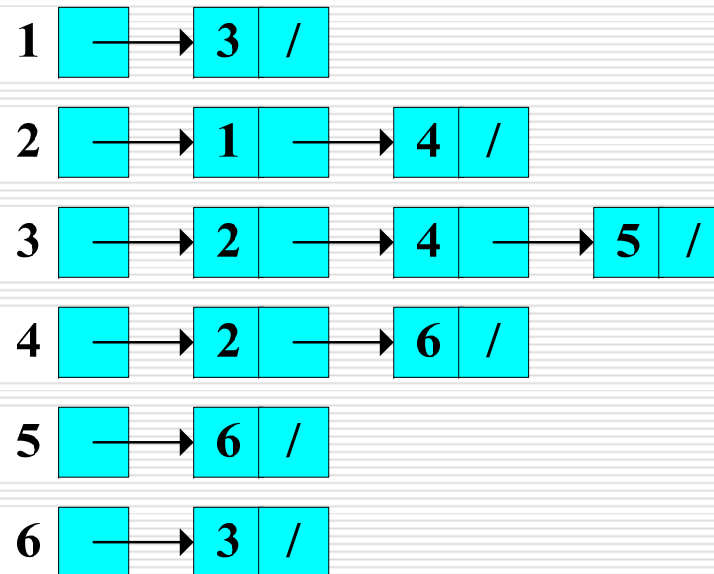
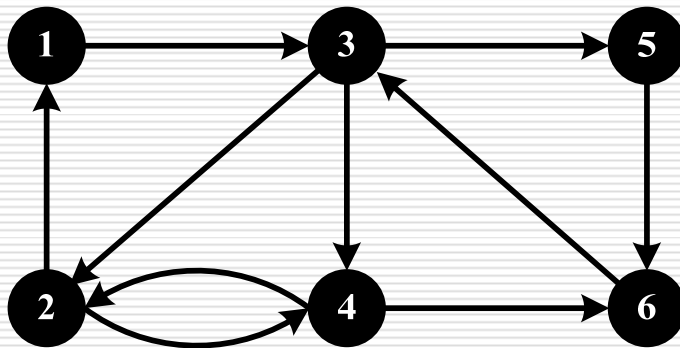
Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
 - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.



Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
 - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.
 - Χώρος $\Theta(m)$.
 - Έλεγχος για ύπαρξη ακμής σε χρόνο $O(\text{deg}(u))$.

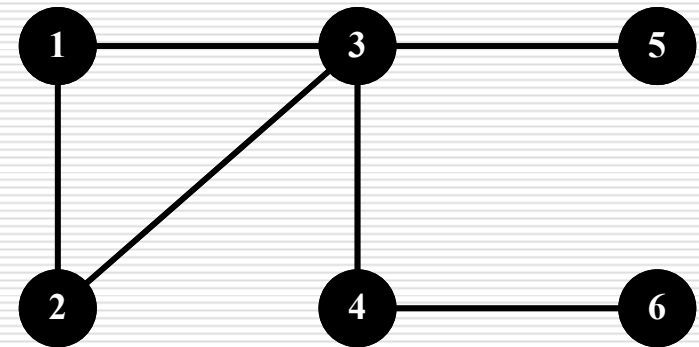
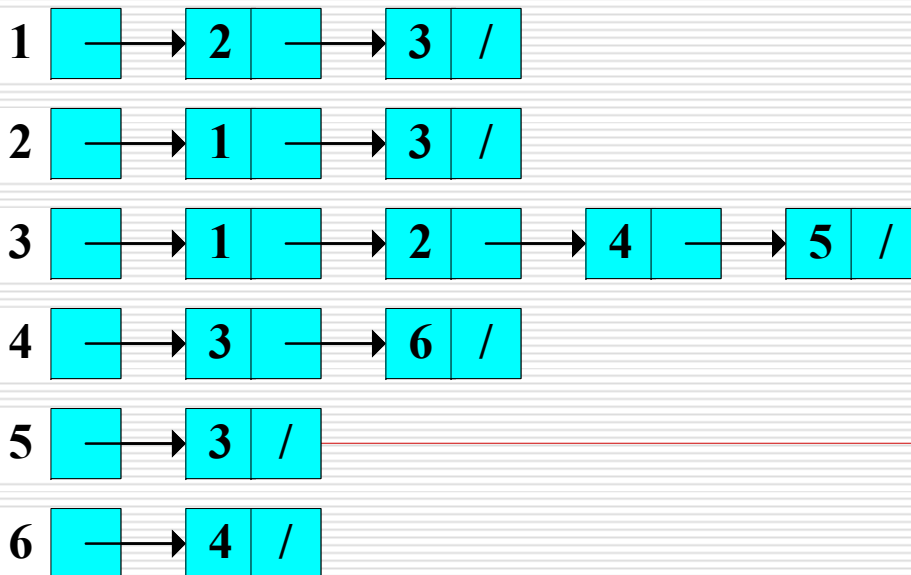


Ασκήσεις

- Μετατροπή από μία αναπαράσταση σε άλλη;
- Τετράγωνο $G^2(V, E')$ γραφήματος $G(V, E)$ έχει ακμές μεταξύ κορυφών σε απόσταση ≤ 2 στο G .
 - Δίνεται λίστα (πίνακας) γειτνίασης του αρχικού γραφήματος.
 - Να υπολογισθεί λίστα (πίνακας) γειτνίασης τετραγώνου.
 - Ποιοι είναι οι αντίστοιχοι χρόνοι εκτέλεσης;
- Ανάστροφο (κατευθυνόμενο) γράφημα $G^T(V, E^T)$ προκύπτει από αρχικό γράφημα $G(V, E)$ με αντιστροφή φοράς ακμών.
 - Δίνεται λίστα (πίνακας) γειτνίασης του αρχικού γραφήματος.
 - Να υπολογισθεί λίστα (πίνακας) γειτνίασης ανάστροφου.
 - Ποιοι είναι οι αντίστοιχοι χρόνοι εκτέλεσης;

Εξερεύνηση Γραφημάτων

- Συστηματική «επίσκεψη» όλων των κορυφών και ακμών και εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με βασικές ιδιότητες:
 - (Ισχυρά) συνεκτικές συνιστώσες.
 - Διμερές γράφημα.
 - Γέφυρες και σημεία κοπής.
 - Τοπολογική διάταξη για DAG.
 - ...



Αναζήτηση Κατά Πλάτος (BFS)

- Εκκίνηση από **αρχική κορυφή s** και εξέλιξη σε **φάσεις**.
 - 1^η φάση: εξερεύνηση **γειτόνων s** (σε **απόσταση 1** από s).
 - 2^η φάση: εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών 1^{ης} φάσης** που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε **απόσταση 2** από s).
 - 3^η φάση: εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών 2^{ης} φάσης** που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε **απόσταση 3** από s).
 -
 - φάση k : εξερεύνηση **γειτόνων κορυφών φάσης $k - 1$** που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμη (σε **απόσταση k** από s).
- «Κατά Πλάτος»: ολοκληρώνει **εξερεύνηση** κορυφών σε **απόσταση k** από s **πριν** επεκταθεί σε κορυφές σε **απόσταση $k+1$** .
- Εξέλιξη αναζήτησης: **BFS-δέντρο** (ή δάσος).

Αναζήτηση Κατά Πλάτος (BFS)

- **Τρία είδη** κορυφών:
 - **Ανεξερεύνητη**: όχι επίσκεψη ακόμη.
 - **Υπο-εξέταση**: επίσκεψη αλλά όχι εξερεύνηση γειτόνων.
 - **Εξερευνημένη**: επίσκεψη και εξερεύνηση γειτόνων.
- Κορυφές περνούν από παραπάνω στάδια με αυτή τη σειρά.
 - Αρχικά όλες οι κορυφές **ανεξερεύνητες**.
 - Πρώτη επίσκεψη ανεξερεύνητης κορ. → **υπό-εξέταση**.
 - Επίσκεψη των γειτόνων υπο-εξέταση κορ. → **εξερευνημένη**.
- «Κατά Πλάτος»: σειρά που **γίνονται υπο-εξέταση ίδια με σειρά** που γίνονται **εξερευνημένες**.
 - **(FIFO) ουρά**: εισαγωγή όταν γίνονται υπο-εξέταση και εξαγωγή για εξερεύνηση γειτόνων.

Υλοποίηση

- Πίνακας κατάστασης: $\mathbf{m[v]} = \{ A, Y, E \}$.
- Πίνακας γονέων: $\mathbf{p[v]} =$ πατέρας v στο BFS-δάσος.
- Χρόνος εκτέλεσης $\mathbf{\Theta(n + m)}$.

$\text{BFS}(G(V, E), s)$

$\text{addToQueue}(s); m[s] \leftarrow Y; p[s] \leftarrow \text{NULL};$

for all $v \in V \setminus \{s\}$ **do**

$m[v] \leftarrow A; p[v] \leftarrow \text{NULL};$

while $\text{not emptyQueue}()$ **do**

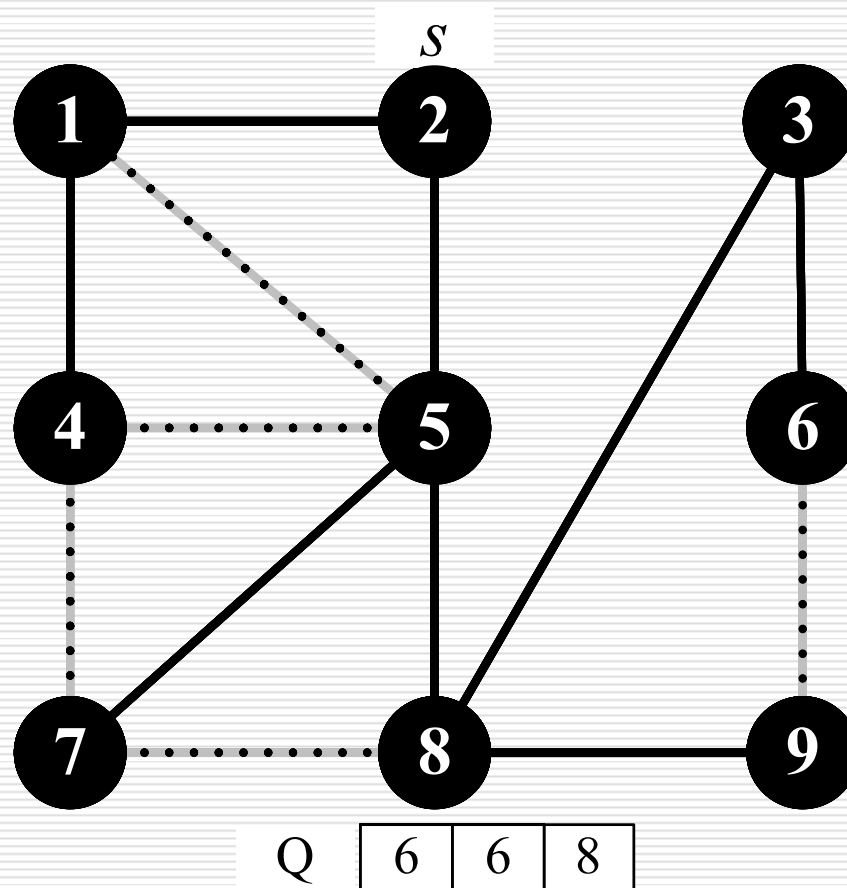
$u \leftarrow \text{extractFromQueue}(); m[u] \leftarrow E;$

for all $v \in L[u]$ **do**

if $m[v] = A$ **then**

$\text{addToQueue}(v); m[v] \leftarrow Y; p[v] \leftarrow u;$

Παράδειγμα



Παραδείγματα – Ιδιότητες

- BFS σε (α) πλήρες γράφημα, (β) δέντρο, (γ) κύκλο.
- Ψευδοκώδικας ολοκληρώνεται με κορυφές **εξερευνημένες ή ανεξερευνητες.**
 - Αν γράφημα συνεκτικό, όλες εξερευνημένες.
 - Αν όχι, εξερευνημένες σε ίδια συνεκτική συνιστώσα με s . Υπόλοιπες ανεξερευνητες
 - Τροποποίηση για ολοκλήρωση **με όλες εξερευνημένες;**

Ιδιότητες

□ **BFS-Δάσος:** υπογράφημα $G_p(V_p, E_p)$ εξερευνημένων κορυφών και ακμών από όπου έγινε πρώτη επίσκεψη.

$$V_p = \{v \in V : m[v] = E\} \quad \text{και} \quad E_p = \{(p[v], v) \in E : v \in V_p \setminus \{s\}\}$$

■ Νδο ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα **συνεκτικό** ανν BFS παράγει **spanning tree**.

■ Τροποποίηση για συνεκτικές συνιστώσες;

□ **Συνεκτικό** γράφημα: BFS δέντρο είναι δέντρο **συντομότερων μονοπατιών** από s (ακμές θεωρούνται μοναδιαίου μήκους).

■ Πώς υπολογίζουμε **αποστάσεις**;

□ Γραμμικός αλγόριθμος για αναγνώριση **διμερούς γραφήματος**;

