Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 10/11/2014

Άσκηση 1: Ασυμπτωτικός Συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις.

(α) Να ταξινομήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά τάξης μεγέθους, να βρείτε δηλαδή μια διάταξη $g_1, g_2, g_3, \ldots$ τέτοια ώστε $g_1 = O(g_2)$, $g_2 = O(g_3)$, κοκ. Σε αυτή τη διάταξη, να επισημάνετε τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους.

$5n$	$(\log n)^{\log n}$	$\log(n!)/n$	$n2^{2^{2^{100}}}$
$\log(\binom{n}{6})$	$\sum_{k=1}^{n} k^5$	$\log^4 n$	$\sqrt{n!}$
e^n	$n^2/\log^{10} n$	$(\log n)^{\log(16n)}$	$\log\left(\binom{2n}{n}\right)$
$n(2.5)^n$	$\binom{2n}{n}$	$\sum_{i=1}^{n} i2^i$	$\sum_{i=1}^{n} i2^{-i}$

(β) Να υπολογίσετε την τάξη μεγέθους $\Theta()$ των λύσεων των παρακάτω αναδρομικών σχέσεων. Για όλες τις σχέσεις, να θεωρήσετε ότι $T(1) = \Theta(1)$.

1. $T(n) = 5T(n/5) + n \log n$
2. $T(n) = 9T(n/10) + \log^3 n$
3. $T(n) = 2T(n/3) + n/\log^2 n$
4. $T(n) = T(n/6) + 3T(n/5) + n$
5. $T(n) = T(n/6) + T(n/2) + T(n/3) + n$
6. $T(n) = T(n-1) + 1/n$
7. $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \Theta(\log n)$
8. $T(n) = T(n-10) + \log n$.

Άσκηση 2: Ταξινόμηση

Έστω πίνακας θετικών ακεραίων $A[1 \ldots n]$ και έστω M το μέγιστο στοιχείο του A.

(α) Να δείξετε ότι ο A μπορεί να ταξινομηθεί σε χρόνο $O(n + M)$. Αν $M = O(n)$, ο χρόνος ταξινόμησης είναι γραμμικός. Γιατί δεν ισχύει το κάτω φράγμα του $\Omega(n \log n)$ σε αυτή την περίπτωση;

(β) Να δείξετε ένα κάτω φράγμα στο χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης κάθε συγκριτικού αλγόριθμου για τον πίνακα A. Τι πρέπει να ισχύει για το M ώστε να υπάρχει συγκριτικός αλγόριθμος ταξινόμησης με χρόνο εκτέλεσης $O(n \log \log n)$; Για αυτές τις τιμές του M, να διατυπώσετε συγκριτικό αλγόριθμο ταξινόμησης με χρόνο εκτέλεσης $O(n \log \log n)$.

Άσκηση 3: Συλλογή Comics

Ένας φανατικός συλλέκτης comics θυμάται ότι από τη συλλογή του αγαπημένου του geek comic έχει χάσει ένα τεύχος, αλλά δεν θυμάται ποιο. Χρειάζεται να εντοπίσει το τεύχος αυτό, γιατί όλα τα τεύχη της σειράς πωλούνται στο Internet σε τιμή ευκαιρίας, σε μία δημοπρασία που λήγει άμεσα.

Ένας από τους λόγους που η συγκεκριμένη σειρά comics είναι η αγαπημένη του έχει να κάνει με τον ιδιόρρυθμο τρόπο αρίθμησης των τευχών: η αρίθμηση των τευχών είναι δυαδική, ξεκινά από το $0\ldots0$ και ολοκληρώνεται στο $1\ldots1$. Κάθε τεύχος έχει k σελίδες, το πλήθος των τευχών είναι $n = 2^k$, και τα bits του αριθμού κάθε τεύχους είναι γραμμένα από ένα σε κάθε σελίδα. Έτσι το μοναδικό που μπορεί να κάνει ο συλλέκτης για να εντοπίσει το τεύχος που λείπει είναι να εξετάζει κάθε φορά το i-οστό bit της αρίθμησης ενός τεύχους j.

Ο συλλέκτης χρειάζεται λοιπόν έναν αλγόριθμο που εντοπίζει το τεύχος που λείπει με όσο το δυνατόν λιγότερες ερωτήσεις της μορφής "*ποιο είναι το i-οστό bit στην αρίθμηση του τεύχους j;*". Μπορείτε να βοηθήσετε τον συλλέκτη διατυπώνοντας έναν αλγόριθμο που χρειάζεται το πολύ $2n$ τέτοιες ερωτήσεις;

Άσκηση 4: Επιλογή

(α) Έστω πολυσύνολο (multiset) S με n θετικούς ακέραιους που όλοι είναι μικρότεροι ή ίσοι δεδομένου ακεραίου M. Έχουμε πρόσβαση (μόνο) στην κατανομή F_S των στοιχείων της συλλογής. Συγκεκριμένα, έχουμε στη διάθεσή μας συνάρτηση $F_S(\ell)$ που για κάθε φυσικό ℓ, επιστρέφει το πλήθος των στοιχείων του S που δεν ξεπερνούν το ℓ, δηλ. $F_S(\ell) = |\{x \in S : x \leq \ell\}|$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που δέχεται ως είσοδο φυσικό k, $1 \leq k \leq n$, και υπολογίζει (καλώντας την F_S) το k-οστό μικρότερο στοιχείο του S. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και να προσδιορίσετε το πλήθος των απαιτούμενων κλήσεων στην F_S (στη χειρότερη περίπτωση). Προσπαθήστε το πλήθος των κλήσεων στην F_S να μην εξαρτάται από το n (μπορεί όμως να εξαρτάται από το M).

(β) Έστω πίνακας διαφορετικών θετικών ακεραίων $A[1\ldots n]$ και έστω M το μέγιστο στοιχείο του A. Θεωρούμε το πολυσύνολο S που αποτελείται από όλες τις μη αρνητικές διαφορές ζευγών στοιχείων του A. Δηλαδή, έχουμε ότι:

$$S = \{A[i] - A[j] : i \neq j \text{ και } A[i] > A[j]\}$$

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το k-οστό μικρότερο στοιχείο του S. Να προσδιορίσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (συναρτήσει των n και M) και να αιτιολογήσετε την ορθότητά του. *Υπόδειξη:* Προσπαθήστε να υλοποιήσετε αποδοτικά την F_S και να χρησιμοποιήσετε τον αλγόριθμο του (α).

Άσκηση 5: Βελτιστοποίηση Κειμένου

Ένα κείμενο αποτελείται από n λέξεις μήκους $a_1, \ldots, a_n$ (το μήκος κάθε λέξης μετριέται σε χαρακτήρες). Θέλουμε να χωρίσουμε το κείμενο σε $k \geq 2$ γραμμές. Οι γραμμές στοιχίζονται αριστερά και μεταξύ δύο λέξεων στην ίδια γραμμή πρέπει να υπάρχει (ακριβώς) ένα κενό (χαρακτήρας space). Δεν επιτρέπεται ο χωρισμός μιας λέξης σε δύο γραμμές ούτε η αλλαγή της σειράς των λέξεων.

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το *ελάχιστο πλάτος γραμμής* που απαιτείται για τον χωρισμό του κειμένου σε k γραμμές. Το πλάτος γραμμής είναι το πλήθος των χαρακτήρων, συμπεριλαμβανομένων των κενών μεταξύ των λέξεων, που έχει η μακρύτερη γραμμή, π.χ., για 4 λέξεις με μήκη $8, 7, 2, 1$ και $k = 2$, το ελάχιστο πλάτος γραμμής είναι $\max\{8, (7+1)+(2+1)+1\} = 12$, και για $k = 3$ είναι $\max\{8, 7, (2+1)+1\} = 8$. Να προσδιορίσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας και να αιτιολογήσετε την ορθότητά του.