Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 11/12/2014

Άσκηση 1: Δρομολόγηση Μαθημάτων

(α) Σε ένα Πανεπιστημιακό Τμήμα, δημιουργήθηκαν πρόσφατα $k \geq 2$ υπερσύγχρονες αίθουσες διδασκαλίας και έχουν υποβληθεί n αιτήματα για διδασκαλία μαθημάτων σε αυτές. Κάθε αίτημα i χαρακτηρίζεται από το χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$ στο οποίο θα διδαχθεί το μάθημα. Η Γραμματεία πρέπει να επιλέξει τα μαθήματα που θα διδαχθούν στις νέες αίθουσες, καθώς και σε ποια αίθουσα θα διδαχθεί το καθένα, ώστε να μην υπάρχει χρονική επικάλυψη μεταξύ των μαθημάτων που διδάσκονται στην ίδια αίθουσα. Το ζητούμενο είναι να μεγιστοποιηθεί το πλήθος των μαθημάτων που θα διδαχθεί στις νέες αίθουσες. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Έστω ότι $k = 2$, δηλ. έχουμε μόνο 2 νέες αίθουσες διδασκαλίας, και κάθε αίτημα διδασκαλίας χαρακτηρίζεται τόσο από το χρονικό διάστημα διδασκαλίας $[s_i, f_i)$ όσο και από τις διδακτικές μονάδες w_i του μαθήματος. Το ζητούμενο είναι να επιλέξουμε και να δρομολογήσουμε στις αίθουσες (χωρίς χρονικές επικαλύψεις) ένα σύνολο μαθημάτων με μέγιστο άθροισμα διδακτικών μονάδων. Εγγυάται ο αλγόριθμος του (α) τον υπολογισμό μιας βέλτιστης λύσης; Αν όχι, να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτή την παραλλαγή του προβλήματος, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.

Άσκηση 2: Ταίριασμα Καρτών

Σε ένα παιδικό παιχνίδι με κάρτες, ο παίκτης A παίρνει n "θετικές" κάρτες και ο παίκτης B παίρνει n "ουδέτερες" κάρτες. Κάθε "θετική" κάρτα i έχει βαρύτητα $a_i \geq 0$ και αξία $v_i \geq 0$, και κάθε "ουδέτερη" κάρτα j έχει βαρύτητα $b_j \geq 0$. Ο A γνωρίζει τις κάρτες του και τις κάρτες του B, και πρέπει να υπολογίσει μια (ένα-προς-ένα) αντιστοιχία των καρτών ώστε να μεγιστοποιήσει την αξία των "θετικών" καρτών που κερδίζει. Αν μια "θετική" κάρτα i του A αντιστοιχιστεί σε μια "ουδέτερη" κάρτα j του B, ο A κερδίζει τη "θετική" κάρτα αν $a_i > b_j$, και τη χάνει διαφορετικά. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια βέλτιστη αντιστοιχία καρτών για τον παίκτη A. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 3: Τηλεκατευθυνόμενο Drone

Το φετινό Χριστουγεννιάτικο δώρο σας είναι ένα drone που μπορείτε να κατευθύνετε από το κινητό σας, μέσω wifi. Το drone σας κινείται μόνο σε μία διάσταση, σε μία νοητή ευθεία με ακέραιες συντεταγμένες (δυστυχώς, δεν υπήρχαν αρκετά χρήματα για κάποιο πιο εξελιγμένο μοντέλο!). Κάθε χρονική στιγμή i, $1 \leq i \leq n$, στέλνετε ένα σήμα $s_i \in \{-1, 1\}$ και το drone οφείλει να εκτελέσει την κίνηση s_i, δηλ. να μετακινηθεί μία θέση αριστερά, από το σημείο x στο $x - 1$, αν $s_i = -1$, ή μία θέση δεξιά, από το x στο $x + 1$, αν $s_i = 1$. Λόγω παρεμβολών, το drone δεν λαμβάνει πάντα το σωστό σήμα. Έτσι, τη χρονική στιγμή i, το drone λαμβάνει ένα σήμα $\hat{s}_i \in \{-1, 1\}$ και με βάση την ισχύ των παρεμβολών, υπολογίζει την πιθανότητα $p_i \in [0, 1]$ αυτό το σήμα να είναι σωστό, δηλ. να ισχύει ότι $\hat{s}_i = s_i$. Προσαρμοζόμενο σε αυτά τα δεδομένα, το drone εκτελεί την κίνηση $\hat{s}_i$ με πιθανότητα p_i, και την κίνηση $-\hat{s}_i$ με πιθανότητα $1-p_i$. Ξεκινώντας από τη θέση 0, έστω $k = \sum_{i=1}^{n} s_i$ η θέση όπου θέλετε να βρεθεί το drone τη χρονική στιγμή n. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(k, n)$ το drone να βρεθεί πράγματι στη θέση k τη χρονική στιγμή n. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει την πιθανότητα $P(k, n)$ με δεδομένα την επιθυμητή θέση k, την ακολουθία σημάτων $(\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$ που λαμβάνει το drone και τις πιθανότητες $(p_1, \ldots, p_n)$ με τις οποίες εκτελεί τις αντίστοιχες κινήσεις. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Διαμέριση Ακολουθίας

Δίνονται μια ακολουθία n θετικών ακεραίων $(a_1, \ldots, a_n)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε μια διαμέριση της ακολουθίας σε διαστήματα *διαδοχικών όρων* (δηλ. δεν επιτρέπεται αναδιάταξη των όρων της ακολουθίας) ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό περιθώριο των διαστημάτων. Το *περιθώριο* ενός διαστήματος είναι ίσο με τη διαφορά του μέγιστου όρου από τον ελάχιστο όρο του διαστήματος (π.χ., το περιθώριο του διαστήματος $(4, 7, 5, 3)$ είναι $7 - 3 = 4$). Αν το διάστημα περιέχει έναν μόνο όρο, το περιθώριο είναι 0.

(α) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια βέλτιστη (ως προς το συνολικό περιθώριο) διαμέριση της ακολουθίας $(a_1, \ldots, a_n)$ όταν το πλήθος των διαστημάτων δεν είναι δεδομένο (δηλ. το πλήθος των διαστημάτων επιλέγεται ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό περιθώριο). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Να τροποποιήσετε τον αλγόριθμό σας ώστε να υπολογίζει μια βέλτιστη διαμέριση της ακολουθίας $(a_1, \ldots, a_n)$ σε δεδομένο πλήθος $k \geq 2$ διαστημάτων. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του τροποποιημένου αλγόριθμου;

Παράδειγμα: Θεωρούμε την ακολουθία $(2, 1, 3, 1, 2)$ με $n = 5$ όρους. Αν το πλήθος των διαστημάτων δεν είναι δεδομένο, κάθε βέλτιστη διαμέριση χρησιμοποιεί 3 διαστήματα, π.χ., $(2, 1)$, $(3, 1)$, (2). Το βέλτιστο συνολικό περιθώριο είναι $1 + 2 + 0 = 3$. Αν πρέπει να έχουμε $k = 2$ διαστήματα, τότε μια βέλτιστη διαμέριση είναι η $(2, 1, 3)$, $(1, 2)$, με συνολικό περιθώριο $1 + 1 = 2$.

Άσκηση 5: Μετατροπή σε Παλίνδρομο

Μια συμβολοσειρά είναι παλίνδρομο (ή καρκινική) αν διαβάζεται με τον ίδιο τρόπο τόσο από τα αριστερά προς τα δεξιά όσο και από τα δεξιά προς τα αριστερά, π.χ. *αννα*, *1001001*, *νιψονανομηματαμημονανοψιν*. Δεδομένης μιας συμβολοσειράς $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ μήκους n (π.χ. από το Ελληνικό αλφάβητο), θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο πλήθος χαρακτήρων που χρειάζεται να προσθέσουμε στη $\boldsymbol{\sigma}$ ώστε η συμβολοσειρά που προκύπτει να είναι παλίνδρομο (μπορούμε να προσθέσουμε έναν ή περισσότερους χαρακτήρες σε οποιεσδήποτε θέσεις της συμβολοσειράς). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.