Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 12/1/2015

Άσκηση 1: Γέφυρες και Σημεία Κοπής σε Γραμμικό Χρόνο

Έστω $G(V, E)$ ένα απλό συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Μια ακμή e του G αποτελεί *γέφυρα* αν το υπογράφημα του G που προκύπτει από την αφαίρεση της e είναι μη συνεκτικό (ή ισοδύναμα, αν η e δεν ανήκει σε κάποιο κύκλο του G). Μια κορυφή v του G αποτελεί *σημείο κοπής* αν το υπογράφημα του G που προκύπτει από την αφαίρεση της v και όλων των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή είναι μη συνεκτικό.

Να διατυπώσετε αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* που υπολογίζει όλες τις γέφυρες και όλα τα σημεία κοπής ενός απλού συνεκτικού μη κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$ που αναπαρίσταται με λίστα γειτνίασης. Να αιτιολογήσετε προσεκτικά την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

Υπόδειξη: Θα σας βοηθήσει να μελετήσετε αυτή την άσκηση παράλληλα με τις αντίστοιχες ασκήσεις **22-2** του CLRS και **3.31** του DPV.

Άσκηση 2: Μέτρηση Συντομότερων Μονοπατιών

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με μοναδιαία μήκη ακμών και μια αρχική κορυφή $s \in V$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που για κάθε κορυφή $v \in V \setminus \{s\}$, υπολογίζει το πλήθος των διαφορετικών συντομότερων $s - v$ μονοπατιών. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Μπορείτε να γενικεύσετε τον αλγόριθμό σας (ώστε να παραμείνει γραμμικού χρόνου) αν οι ακμές έχουν ακέραια μήκη στο σύνολο $\{1, \ldots, k\}$, όπου k μια μικρή θετική σταθερά;

Άσκηση 3: Παιχνίδι Επιλογής Ακμών σε Κατευθυνόμενο Ακυκλικό Γράφημα

Θεωρούμε το παρακάτω παιχνίδι επιλογής ακμών με 2 παίκτες, τον Α και τον Β, που λαμβάνει χώρα σε ένα Κατευθυνόμενο Ακυκλικό Γράφημα (DAG) G, με αρχική κορυφή s. Πρώτα ο παίκτης Α επιλέγει μια ακμή από την s προς κάποια κορυφή v_1. Στη συνέχεια, ο παίκτης Β επιλέγει μια ακμή από την v_1 προς κάποια κορυφή v_2. Έπειτα, ο παίκτης Α επιλέγει μια ακμή από την v_2 προς κάποια κορυφή v_3, κοκ. Το παιχνίδι ολοκληρώνεται όταν φτάσουμε σε μία κορυφή u χωρίς εξερχόμενες ακμές, οπότε ο παίκτης που έχει σειρά να επιλέξει εξερχόμενη ακμή από την u χάνει (γιατί δεν έχει καμία επιλογή). Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που με δεδομένα ένα DAG G και μια αρχική κορυφή s, αποφασίζει αν υπάρχει στρατηγική του παίκτη Α που εγγυάται ότι αυτός κερδίζει το παιχνίδι, ανεξάρτητα από τη στρατηγική του παίκτη Β. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Απαραίτητες (και Μη Απαραίτητες) Ακμές

Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές και θετικά βάρη w στις ακμές (τα βάρη κάποιων ακμών μπορεί να είναι ίδια).

(α) Έστω T ένα συνδετικό δέντρο του G για το οποίο γνωρίζουμε ότι κάθε ακμή $e \in T$ εντάσσεται σε κάποιο Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G. Αρκεί αυτό για να συμπεράνουμε ότι το T αποτελεί ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την απάντησή σας.

(β) Συμβολίζουμε με $\mathrm{MST}(G)$ το συνολικό βάρος ενός Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου του G. Μια ακμή $e \in E$ θεωρείται *απαραίτητη* για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο αν η αφαίρεσή της οδηγεί σε αύξηση του βάρους του, δηλ. αν $\mathrm{MST}(G) < \mathrm{MST}(G - e)$. Να αποδείξετε ότι:

1. Μια ακμή e είναι απαραίτητη αν και μόνο αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που την διασχίζει, δηλ. για κάθε ακμή $e' = \{u, v\}$, $e' \neq e$, με $u \in S$ και $v \in V \setminus S$, ισχύει ότι $w(e) < w(e')$.
2. Μια ακμή e είναι απαραίτητη αν και μόνο αν για κάθε κύκλο C που περιέχει την e, η e δεν αποτελεί ακμή μέγιστου βάρους του C, δηλ. υπάρχει ακμή $e' \in C$ με $w(e') > w(e)$.

(γ) Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο *γραμμικού χρόνου* που αποφασίζει αν μια ακμή e του G είναι απαραίτητη για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(δ) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει όλες τις ακμές του G που είναι απαραίτητες για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο. Στόχος είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας να είναι συγκρίσιμη με αυτή των αλγορίθμων που υπολογίζουν ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 5: Διαχωρισμός Γραφήματος

Έστω συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$, όπου κάθε ακμή e έχει βάρος $w(e) > 0$. Για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, συμβολίζουμε με $d(u, v)$ την *απόσταση* μεταξύ των u και v στο G. Δηλαδή, $d(u, v)$ είναι το μήκος του συντομότερου $u - v$ μονοπατιού στο G (τα μήκη των μονοπατιών υπολογίζονται λαμβάνοντας υπόψη τα βάρη w των ακμών).

(α) Έστω T ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G. Να δείξετε ότι για κάθε ακμή $e = \{u, v\} \in T$, $d(u, v) = w(e)$ (δηλ. η e αποτελεί ένα συντομότερο $u - v$ μονοπάτι).

(β) Για κάθε διαμέριση του V σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2, ορίζουμε ως απόσταση $d(S_1, S_2)$ την ελάχιστη απόσταση μεταξύ μιας κορυφής του S_1 και μιας κορυφής του S_2, δηλ. $d(S_1, S_2) = \min_{u \in S_1, v \in S_2} d(u, v)$. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια διαμέριση του V σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2 που μεγιστοποιεί την απόσταση $d(S_1, S_2)$. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. *Υπόδειξη:* Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσετε αποστάσεις κορυφών στο G!