Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
4η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 15/3/2015

Άσκηση 1: Εργαστήριο Ηλεκτρονικής

Η κατασκευή της πλακέτας στο μάθημα της εργαστηριακής ηλεκτρονικής δεν είναι εύκολη υπόθεση. Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν, να γράψουμε ένα πρόγραμμα που διευκολύνει την διαδικασία.

Φανταζόμαστε μια πλακέτα ως ένα $L \times W$ πλέγμα σημείων (i, j), $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq W$. Στην πλακέτα έχουν τοποθετηθεί δύο στοιχεία και πρέπει να τα συνδέσουμε μεταξύ τους. Για τη σύνδεση, έχουμε στη διάθεσή μας πρακτικά απεριόριστο αριθμό ευθύγραμμων συρμάτων, σε όλα τα δυνατά μήκη, τα οποία όμως δεν θέλουμε να λυγίσουμε (ώστε να μπορούν εύκολα να ξαναχρησιμοποιηθούν). Έτσι τα σύρματα που θα τοποθετήσουμε πρέπει να είναι παράλληλα στους άξονες της πλακέτας και θα πρέπει να τα ενώσουμε με κολλήσεις. Οι κολλήσεις, ωστόσο κοστίζουν (σε χρόνο και κομψότητα) και αυξάνουν την πολυπλοκότητα της τοπολογίας. Στην πλακέτα υπάρχουν ακόμη και κάποια "εμπόδια" όπου, για τεχνικούς λόγους, δεν επιτρέπεται ούτε να περάσει σύρμα ούτε να γίνουν κολλήσεις. Πρέπει, λοιπόν, να γράψουμε ένα πρόγραμμα που να επιλέγει και να τοποθετεί τα ευθύγραμμα σύρματα ώστε να επιτυγχάνεται η σύνδεση των δύο στοιχείων με τον ευκολότερο και τον κομψότερο τρόπο (βλ. με το ελάχιστο συνολικό κόστος).

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, δύο θετικούς φυσικούς, L και W, που αντιστοιχούν στις διαστάσεις της πλακέτας. Οι επόμενες L γραμμές θα περιέχουν W φυσικούς αριθμούς η καθεμία. Στις δύο θέσεις όπου έχουν τοποθετηθεί τα στοιχεία θα υπάρχει η τιμή 0 (έτσι δηλώνουμε τις θέσεις των στοιχείων που πρέπει να συνδέσουμε μεταξύ τους – θα υπάρχουν πάντα ακριβώς δύο θέσεις με τιμή 0). Στις θέσεις-"εμπόδια" θα υπάρχει η τιμή 4000. Σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις, η τιμή θα είναι ένας θετικός ακέραιος που δεν θα ξεπερνά το 2000. Πάντα θα υπάρχει τρόπος να συνδεθούν οι θέσεις των δύο στοιχείων με ευθύγραμμα σύρματα.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος της σύνδεσης των δύο στοιχείων.

Περιορισμοί:

$1 \leq L \leq 1000$
$1 \leq W \leq 1000$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

```
5 5
0 1516 1170 10 1524
1157 1611 1142 4000 311
1936 54 752 680 881
1913 802 638 0 12
135 4000 13 762 89
```

Παράδειγμα Εξόδου:

```
1284
```

Εξήγηση Παραδείγματος: Οι θέσεις που πρέπει να συνδέσουμε είναι οι $(1, 1)$ και $(4, 4)$, και υπάρχουν "εμπόδια" στις θέσεις $(2, 4)$ και $(5, 2)$. Κάνουμε τη σύνδεση (με ευθύγραμμα σύρματα) με κολλήσεις στις θέσεις $(1,1)$ (αρχική, κόστος 0), $(1,3)$ (κόστος 1170), $(5,3)$ (κόστος 13), $(5,5)$ (κόστος 89), $(4,5)$ (κόστος 12), και $(4,4)$ (τελική, κόστος 0). Το συνολικό κόστος είναι $1170 + 13 + 12 + 89 = 1284$. Παρατηρήστε ότι δεν μπορούμε να έχουμε ευθύγραμμο σύρμα μεταξύ των θέσεων $(1,4)$ και $(4,4)$, λόγω της ύπαρξης "εμποδίου" στη θέση $(2,4)$.

Άσκηση 2: Διαπλανητικά Ταξίδια

Στον μακρινό Γαλαξία των Αλγορίθμων, υπάρχει ένα ηλιακό σύστημα με K πλανήτες στους οποίους κατοικούν ευφυή εξωγήινα όντα! Όλοι οι πλανήτες απέχουν την ίδια απόσταση από τον ήλιο, επομένως μπορούμε να φανταστούμε ότι σχηματίζουν έναν δακτύλιο γύρω από αυτόν.

Οι εξωγήινοι έχουν σχεδιάσει ένα ιεραρχικό δίκτυο μεταφορών που τους επιτρέπει να μετακινούνται μεταξύ των πλανητών. Συγκεκριμένα, στη μεγαλύτερη χώρα κάθε πλανήτη, υπάρχει ένα διαστημοδρόμιο που χρησιμοποιείται για διαστημικές πτήσεις από και προς τους δύο γειτονικούς πλανήτες. Αν δηλαδή αριθμήσουμε τους πλανήτες από το 0 έως το $K-1$, το διαστημοδρόμιο στον πλανήτη i χρησιμοποιείται για πτήσεις από και προς τους πλανήτες $(i-1) \bmod K$ και $(i+1) \bmod K$.

Για τη μετακίνησή τους μεταξύ των χωρών του ίδιου πλανήτη, οι εξωγήινοι έχουν σχεδιάσει οδικά δίκτυα που αντιστοιχούν σε δυαδικά δέντρα (οι κόμβοι του δέντρου αντιστοιχούν στις χώρες του πλανήτη και οι ακμές του δέντρου αντιστοιχούν στους δρόμους). Ρίζα του δέντρου είναι η μεγαλύτερη χώρα του πλανήτη, αυτή δηλαδή όπου βρίσκεται και το διαστημοδρόμιο[1].

Ένας πλούσιος κάτοικος αυτού του ηλιακού συστήματος θέλει να κάνει ένα μεγάλο ταξίδι με σκοπό να θαυμάσει τα αξιοθέατα διαφόρων χωρών. Ωστόσο, δεν θέλει να περάσει από την ίδια χώρα δύο φορές, καθώς το θεωρεί χάσιμο χρόνου. Έτσι, το δρομολόγιό του θα δίνεται από ένα απλό μονοπάτι που αρχίζει και τελειώνει σε διαφορετικές χώρες. Γι' αυτό, αναζητεί το μεγαλύτερο απλό μονοπάτι στο δίκτυο του ηλιακού συστήματος (το μήκος κάθε μονοπατιού είναι ίσο με το πλήθος των ακμών του). Για να τον βοηθήσετε, πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει το μήκος του μεγαλύτερου απλού μονοπατιού σε ένα τέτοιο δίκτυο.

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input, στην πρώτη γραμμή, έναν θετικό ακέραιο αριθμό K που δηλώνει το πλήθος των πλανητών στο ηλιακό σύστημα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι πλανήτες είναι αριθμημένοι διαδοχικά από 0 έως $K-1$. Στις επόμενες $2K$ γραμμές θα δίνεται η περιγραφή των K οδικών δικτύων των πλανητών (με τη μορφή των πινάκων γονέων για τα αντίστοιχα δυαδικά δέντρα). Συγκεκριμένα, στη γραμμή $2i$ θα δίνεται ένας θετικός ακέραιος N_i που δηλώνει το πλήθος των χωρών του πλανήτη i. Στη γραμμή $2i+1$, θα δίνονται $N_i - 1$ φυσικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στον πίνακα γονέων του δυαδικού δέντρου του πλανήτη i. Συγκεκριμένα, ως ρίζα θα έχουμε πάντα τη χώρα με αριθμό 1, και δεν θα υπάρχει εγγραφή στον πίνακα γονέων για αυτή. Αν στην ℓ-οστή θέση, $\ell = 1, \ldots, N_i - 1$, δίνεται η τιμή j, αυτό δηλώνει ότι η χώρα $\ell + 1$ του πλανήτη i έχει ως πατέρα στο οδικό του δίκτυο τη χώρα j. Στην περίπτωση που $N_i = 1$, δηλαδή όταν ο πλανήτης i έχει μόνο μία χώρα, τη ρίζα του δέντρου, στη γραμμή $2i+1$ θα υπάρχει η τιμή 0.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν θετικό ακέραιο που αντιστοιχεί στο μήκος του μεγαλύτερου μονοπατιού στο δίκτυο μεταφορών της εισόδου.

[1] Το δυαδικό δέντρο που αντιστοιχεί στο οδικό δίκτυο κάθε πλανήτη δεν είναι αναγκαστικά πλήρες. Έτσι, κάθε χώρα (κόμβος) μπορεί να έχει κανένα, ένα ή δύο χώρες (παιδιά) με τις οποίες συνδέεται οδικώς.

Περιορισμοί:

$3 \leq K \leq 10^5$
$1 \leq N_i \leq 10^5$
$3 \leq \sum_{i=0}^{K-1} N_i \leq 2 \cdot 10^6$
Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παραδείγματα Εισόδου:

```
4
7
1 2 3 2 3 5
1
0
1
0
1
0
```

```
4
2
1
11
1 2 3 4 5 1 7 8 9 10
2
1
2
1
```

Παραδείγματα Εξόδου:

```
6
```

```
10
```