

Δυναμικός Προγραμματισμός

Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Διωνυμικοί Συντελεστές

□ Διωνυμικοί συντελεστές $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$C(n, k) = \begin{cases} C(n-1, k-1) + C(n-1, k) & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

```
long Binom(int n, int k) {  
    if ((k == 0) || (k == n)) return(1);  
    return(Binom(n - 1, k - 1) + Binom(n - 1, k)); }
```

- Χρόνος εκτέλεσης δίνεται από την **ίδια αναδρομή!**
 $T(n, k) = \Theta(C(n, k)) = \Omega((n/k)^k)$, $C(30, 15) = 155117520$
- Πρόβλημα οι επαναλαμβανόμενοι υπολογισμοί.

□ Όταν έχω **επικαλυπτόμενα στιγμιότυπα**, χρησιμοποιώ **δυναμικό προγραμματισμό**.

Τρίγωνο του Pascal

$$C(n, k) = \begin{cases} C(n-1, k-1) + C(n-1, k) & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Binomial(n, k)

$C[0, 0] = C[1, 0] = C[1, 1] = 1;$

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**

$C[i, 0] \leftarrow 1;$

for $j \leftarrow 1$ **to** $\min\{i-1, k\}$ **do**

$C[i, j] \leftarrow C[i-1, j-1] + C[i-1, j];$

if $i-1 < k$ **then** $C[i, i] = 1;$

return($C[n, k]$);

- Χρόνος εκτέλεσης $\Theta(nk)$ αντί για $\Omega((n/k)^k)$.
- Μνήμη $\Theta(nk)$. Μπορεί να μειωθεί σε $\Theta(k)$.

Δυναμικός Προγραμματισμός

- Εφαρμόζουμε **δυναμικό προγραμματισμό** για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης όπου ισχύει:
 - **Αρχή βελτιστότητας** (βέλτιστες επιμέρους λύσεις).
 - Κάθε τμήμα βέλτιστης λύσης αποτελεί **βέλτιστη λύση** για αντίστοιχο υποπρόβλημα.
 - π.χ. κάθε τμήμα μιας συντομότερης διαδρομής είναι συντομότερη διαδρομή μεταξύ των άκρων του.
- Έστω βέλτιστες **λύσεις για «μικρότερα»** προβλήματα. Πως **συνδυάζονται** για βέλτιστη **λύση σε «μεγαλύτερα»;**
 - **Αναδρομική εξίσωση** που περιγράφει **τιμή** βέλτιστης λύσης.
 - Υπολογίζουμε λύση από μικρότερα σε μεγαλύτερα (**bottom-up**).

Διακριτό Πρόβλημα Σακιδίου

- Δίνονται n αντικείμενα και **σακίδιο** μεγέθους B . Αντικείμενο i έχει **μέγεθος** και **αξία**: (s_i, p_i)
- Ζητείται συλλογή **μέγιστης αξίας** που **χωράει** στο σακίδιο.

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^n f_i p_i \\ \text{υπό περιορισμούς} \sum_{i=1}^n f_i s_i \leq B \\ f_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n] \end{array} \quad f_i = \begin{cases} 1 & i \text{ εντός} \\ 0 & i \text{ εκτός} \end{cases}$$

- Αντικείμενα: $\{ (1, 0.5), (2, 5), (2, 5), (3, 9), (4, 8) \}$
Μέγεθος σακιδίου: **4**.
- Βέλτιστη λύση = $\{ (2, 5), (2, 5) \}$
- Αντικείμενα: $\{ (3, 5), (2, 7), (4, 4), (6, 8), (5, 4) \}$
Μέγεθος σακιδίου: **10**.
- Βέλτιστη λύση = $\{ (3, 5), (2, 7), (4, 4) \}$

Αρχή Βελτιστότητας

- Αντικείμενα $N = \{1, \dots, n\}$, σακίδιο μεγέθους B .
Βέλτιστη λύση $A^* \subseteq \{1, \dots, n\}$.
- Αγνοούμε αντικείμενο n :
 - $A^* \setminus \{n\}$ βέλτιστη λύση για $N \setminus \{n\}$ με σακίδιο $B - (f_n s_n)$.
- Αγνοούμε αντικείμενα $\{n, n - 1\}$:
 - $A^* \setminus \{n, n - 1\}$ βέλτιστη λύση για $N \setminus \{n, n - 1\}$ με σακίδιο $B - (f_n s_n + f_{n-1} s_{n-1})$.
- Αν γνωρίζουμε βέλτιστη αξία για αντικείμενα $N \setminus \{n\}$ και σακίδια μεγέθους B και $B - s_n$
 - ... αποφασίζουμε αν αντικείμενο n στη βέλτιστη λύση!

Αναδρομική Εξίσωση

- $P(n-1, B)$ βέλτιστη αξία για $N \setminus \{n\}$ σε σακίδιο B
 $P(n-1, B - s_n)$ βέλτιστη αξία για $N \setminus \{n\}$ σε σακίδιο $B - s_n$

$$P(n, B) = \max\{P(n-1, B), P(n-1, B - s_n) + p_n\}$$

- Βέλτιστη αξία με αντικείμενα $\{1, \dots, i\}$ και σακίδιο μεγέθους b : $P(i, b)$

$$P(i, b) = \begin{cases} 0 & \text{αν } b \leq 0 \text{ ή } i = 0 \\ P(i-1, b) & \text{αν } i \geq 1 \text{ και } b < s_i \\ \max\{P(i-1, b), P(i-1, b - s_i) + p_i\} & \text{για } i = 1, \dots, n \\ & \text{και } b = s_i, \dots, B \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$P(i, b) = \begin{cases} 0 & \text{αν } b \leq 0 \text{ ή } i = 0 \\ P(i-1, b) & \text{αν } i \geq 1 \text{ και } b < s_i \\ \max\{P(i-1, b), P(i-1, b-s_i) + p_i\} & \text{για } i = 1, \dots, n \\ & \text{και } b = s_i, \dots, B \end{cases}$$

- Αντικείμενα: $\{ (3, 5), (2, 7), (4, 4), (6, 8), (5, 4) \}$
Μέγεθος σακιδίου: **10**.

$i \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5
2	0	0	7	7	7	12	12	12	12	12	12
3	0	0	7	7	7	12	12	12	12	16	16
4	0	0	7	7	7	12	12	12	15	16	16
5	0	0	7	7	7	12	12	12	15	16	16

Υλοποίηση

Αναδρομική υλοποίηση;

```
Knapsack( $B, (s_1, p_1), \dots, (s_n, p_n)$ )  
  for  $i \leftarrow 0$  to  $n$  do  $P[i, 0] \leftarrow 0$ ;  
  for  $b \leftarrow 1$  to  $B$  do  $P[0, b] \leftarrow 0$ ;  
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
    for  $b \leftarrow 1$  to  $B$  do  
      if  $b - s_i \geq 0$  then  
         $t \leftarrow P[i - 1, b - s_i] + p_i$ ;  
      else  $t \leftarrow 0$ ;  
      if  $P[i - 1, b] \geq t$  then  
         $P[i, b] \leftarrow P[i - 1, b]$ ;  
      else  $P[i, b] \leftarrow t$ ;  
  return( $P[n, B]$ );
```

Χρόνος **$O(nB)$**

Μνήμη **$O(nB)$**

Πρόβλημα Σακιδίου

- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:
 - Συλλογή που χωράει **εφικτή λύση**. Αντιστοιχεί σε **αξία**.
 - Ζητούμενο: (**βέλτιστη**) συλλογή που χωράει με μέγιστη αξία.
- Εξαντλητική αναζήτηση:
 - #συλλογών = 2^n . Χρόνος $\Omega(n2^n)$
- Πρόβλημα Σακιδίου είναι **NP-δύσκολο** και **δεν υπάρχει «γρήγορος»** (πολυωνυμικός) **αλγόριθμος**.
 - Εφαρμογή δυναμικού προγραμματισμού.
 - Χρόνος $\Theta(nB)$. **Δεν** είναι πολυωνυμικός(;)!

Ψευδοπολυωνυμικοί Αλγόριθμοι

- Το πρόβλημα του σακιδίου είναι **NP-δύσκολο**.
- Αλγόριθμος $O(nB)$ δεν είναι πολυωνυμικού χρόνου;
 - Για ναι, πρέπει πολυώνυμο του **μεγέθους εισόδου!**
 - Μέγεθος εισόδου: $O(n(\log_2 B + \log_2 P_{\max}))$
 - Χρόνος **πολυωνυμικός στο n αλλά εκθετικός στο $\log_2 B$**
- Αριθμητικά προβλήματα:
 - **Μέγεθος αριθμών** πολύ μεγαλύτερο (π.χ. εκθετικό) από πλήθος «**βασικών συνιστωσών**» (ότι συμβολίζουμε με n).
- Αλγόριθμος πολυωνυμικό χρόνο:
 $O((n \log \max_num)^k)$, σταθερά $k \geq 1$
- Αλγόριθμος **ψευδο-πολυωνυμικού** χρόνου:
 $O((n \max_num)^k)$, σταθερά $k \geq 1$

Απλησιότητα vs Δυναμικός Προγρ.

- Διακριτό Πρόβλ. Σακιδίου: **όχι** ιδιότητα **άπληστης επιλογής**.
 - Π.χ. Αντικείμενα: $\{(1, 1+\varepsilon), (B, B)\}$. Σακίδιο μεγέθους B .
- **Απλησιότητα** και **Δυναμικός Προγραμματισμός**:
 - Αρχή βελτιστότητας.
- **Δυναμικός Προγραμματισμός**: αναδρομή
 - Βέλτιστη λύση σε **όλα** τα υπο-προβλήματα που εμπλέκονται στην αναδρομή.
 - Διακριτό Σακίδιο: Βέλτιστη λύση με πρώτα i αντικείμενα για **όλα** τα μεγέθη σακιδίου!
 - Συνδυάζει «κατάλληλες» επιμέρους λύσεις για βέλτιστη.
 - Λύση **όλων** υπο-προβλημάτων **εγγυάται βέλτιστη λύση** αλλά **κοστίζει σημαντικά σε υπολογιστικό χρόνο**.

Απλησιότητα vs Δυναμικός Προγρ.

- **Απλησιότητα:** επανάληψη
 - Ταξινόμηση ως προς κάποιο (εύλογο) κριτήριο.
 - Σε κάθε βήμα **αμετάκλητη** άπληστη επιλογή.
 - Άπληστη επιλογή: φαίνεται καλύτερη με βάση τρέχουσα κατάσταση και κάποιο (απλό) κριτήριο.
 - Λύση μόνο «**αναγκαίων**» υπο-προβλημάτων: **αποδοτικό υπολογιστικά** αλλά **δεν δίνει πάντα τη βέλτιστη** λύση.
 - **Γρήγοροι**, απλοί και «φυσιολογικοί» αλγόριθμοι!
 - (Καλές) **προσεγγιστικές** λύσεις σε πολλά προβλήματα.
 - **Βέλτιστη** λύση μόνο όταν **άπληστη επιλογή** (ως προς συγκεκριμένο κριτήριο επιλογής).

Subset Sum και Διαμέριση

□ Subset Sum:

- Σύνολο φυσικών $A = \{s_1, \dots, s_n\}$ και B , $0 < B < s(A)$.
- Υπάρχει $X \subseteq A$ με $s(X) = \sum_{i \in X} s_i = B$;
- Knapsack αποτελεί γενίκευση Subset Sum.
- Πρόβλημα Διαμέρισης (Partition): όταν $B = s(A) / 2$

□ $S(i, b)$ είναι TRUE αν υπάρχει $X \subseteq \{1, \dots, i\}$ με $s(X) = b$.

$$S(i, b) = \begin{cases} 1 & \text{αν } b = 0 \\ 0 & \text{αν } b < 0 \\ 0 & \text{αν } i = 0 \text{ και } b > 0 \\ S(i-1, b) \vee S(i-1, b-s_i) & \text{για } i = 1, \dots, n \\ & \text{και } b = 1, \dots, B \end{cases}$$

- Η τιμή του $S(n, B)$ δίνει την απάντηση.

Το Πρόβλημα του Περιπτερά

- Κέρματα αξίας 1, 12, και 20 λεπτών.
- Ρέστα ποσό x με **ελάχιστο** #κερμάτων.
 - Δυναμικός προγραμματισμός.

Αλυσιδωτός Πολ/μός Πινάκων

- Γινόμενο πινάκων A ($p \times q$) επί B ($q \times r$) σε χρόνο $\Theta(p \ q \ r)$.
(μετράμε μόνο πολ/μούς μεταξύ αριθμών).
- Συντομότερος τρόπος υπολογισμού γινομένου

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-1} & & A_n \\ (d_0 \times d_1) & (d_1 \times d_2) & (d_2 \times d_3) & \dots & (d_{n-2} \times d_{n-1}) & & (d_{n-1} \times d_n) \end{array}$$

- Πολλαπλασιασμός πινάκων είναι πράξη προσεταιριστική
(αποτέλεσμα ανεξάρτητο από υπολογισμό επιμέρους γινομένων.)
- Ο χρόνος υπολογισμού εξαρτάται από τη σειρά!

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ (1 \times 100) & (100 \times 3) & (3 \times 1) \end{array} \quad \begin{array}{cc} (A_1 A_2) & A_3 \\ (1 \times 100 \times 3) + (1 \times 3 \times 1) = 303 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} A_1 & & (A_2 A_3) \\ (1 \times 100 \times 1) + (100 \times 3 \times 1) = 400 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ (13 \times 5) & (5 \times 89) & (89 \times 3) & (3 \times 34) \end{array}$$

Σειρά Υπολογισμού	Αριθμός Πολλαπλασιασμών
$((A_1 A_2) A_3) A_4$	$13 \times 5 \times 89 + 13 \times 89 \times 3 + 13 \times 3 \times 34 = 10582$
$((A_1 A_2)(A_3 A_4))$	54201
$((A_1(A_2 A_3))A_4)$	2856
$(A_1((A_2 A_3)A_4))$	4055
$(A_1(A_2(A_3 A_4)))$	26418

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

- Δίνονται n πίνακες:

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_{n-1} \quad A_n$$
$$(d_0 \times d_1) \quad (d_1 \times d_2) \quad (d_2 \times d_3) \quad \dots \quad (d_{n-2} \times d_{n-1}) \quad (d_{n-1} \times d_n)$$

Με ποια **σειρά** θα υπολογιστεί το **γινόμενο** $A_1 A_2 \dots A_n$ ώστε να **ελαχιστοποιηθεί** #αριθμ. πολ/μών.

- Πρόβλημα **συνδυαστικής βελτιστοποίησης**:
 - Κάθε σειρά υπολογισμού υπολογίζει γινόμενο πινάκων με κάποιο #αριθμ. πολ/μών.
 - Ζητείται η σειρά με **ελάχιστο** #αριθμ. πολ/μών.
- **Αποδοτικός αλγόριθμος** για υπολογισμό καλύτερης σειράς για αλυσιδωτό πολ/μό n πινάκων.

Εξαντλητική Αναζήτηση

□ ... δοκιμάζει **όλες τις σειρές υπολογισμού** και βρίσκει καλύτερη.

■ Κάθε σειρά αντιστοιχεί σε δυαδικό δέντρο με n φύλλα.

■ Χρόνος ανάλογος **#δυαδικών δέντρων με n φύλλα**:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k), \quad P(1) = 1$$

■ Λύση $(n-1)$ -οστός αριθμός Catalan: $P(n) = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} = \Omega\left(\frac{4^n}{n^{3/2}}\right)$

□ Θα εφαρμόσουμε **δυναμικό προγραμματισμό**.

Αρχή Βελτιστότητας

- Συμβολίζουμε $A_{i..j} = A_i \times \cdots \times A_j$
- Βέλτιστη λύση υπολογίζει $A_{1..i}$, $(d_0 \times d_i)$, και $A_{i+1..n}$, $(d_i \times d_n)$, για κάποιο i , $1 \leq i < n$, και τελειώνει με $A_{1..i} \times A_{i+1..n}$.
 - #πολ/μών = $d_0 \times d_i \times d_n + \#\text{πολ/μών}(A_{1..i}) + \#\text{πολ/μών}(A_{i+1..n})$
 - Επιμέρους γινόμενα $A_{1..i}$ και $A_{i+1..n}$ υπολογίζονται **βέλτιστα**.
- Συμβολίζουμε $m[i, j] = \text{βέλτιστος } \#\text{πολ/μών}(A_{i..j})$
- Έστω για κάθε i , $1 \leq i < n$, γνωρίζουμε $m[1, i]$ και $m[i + 1, n]$
- Τότε $m[1, n] = \min_{1 \leq i < n} \{m[1, i] + m[i + 1, n] + d_0 d_i d_n\}$
- Γενική **αναδρομική σχέση**:

$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Δυναμικός Προγραμματισμός

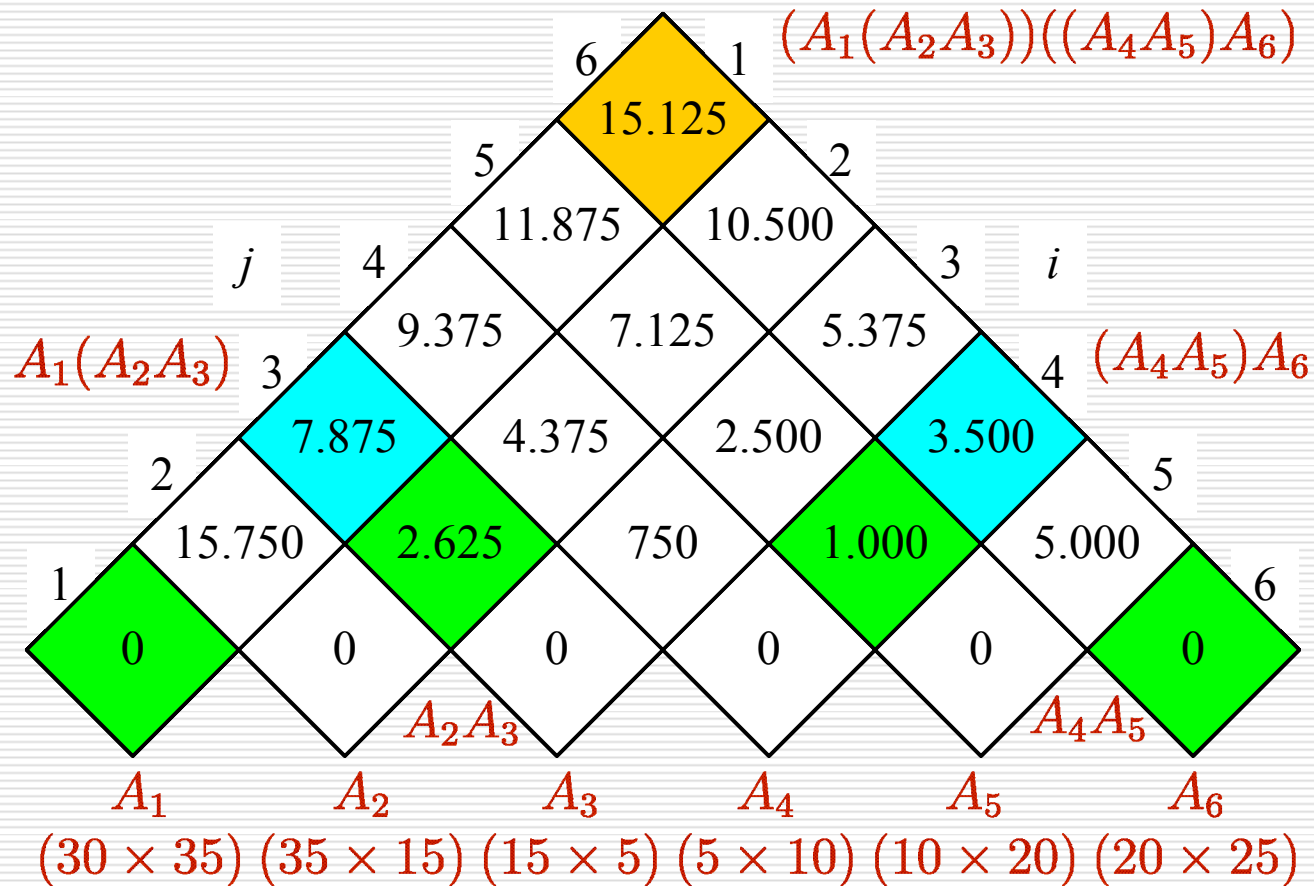
- **Bottom-up** υπολογισμός $m[1, n]$ από αναδρομική σχέση:

$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

- Υπολογίζω $n(n - 1) / 2$ τιμές $m[i, j]$.
 - $m[i, j]$ υπολογίζεται σε χρόνο $O(n)$ από τιμές για γινόμενα μικρότερου εύρους.
 - Τιμές αποθηκεύονται σε πίνακα.

$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{ m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j \} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Παράδειγμα



$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \text{αν } i < j \\ 0 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Υλοποίηση (bottom-up)

```

MatrixChainMultiplication( $d[0, 1, \dots, n]$ ) /*  $A_i$  διάστασης  $d[i - 1] \times d[i]$  */
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
     $m[i, i] \leftarrow 0$ ;
  for  $p \leftarrow 2$  to  $n$  do
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n - p + 1$  do
       $j \leftarrow i + p - 1$ ;  $m[i, j] \leftarrow \infty$ ;
      for  $k \leftarrow i$  to  $j - 1$  do
         $q \leftarrow m[i, k] + m[k + 1, j] + d[i - 1]d[k]d[j]$ ;
        if  $q < m[i, j]$  then  $m[i, j] \leftarrow q$ ;
  return( $m[1, n]$ );

```

□ Χρόνος $O(n^3)$ και μνήμη $O(n^2)$, μειώνεται σε $O(n)$.

$$m[i, j] = \begin{cases} \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \alpha \nu \ i < j \\ 0 & \alpha \nu \ i = j \end{cases}$$

Υλοποίηση (top-down)

RecMatrixChain($d[i - 1, \dots, j]$)

if $i = j$ **then return**(0);

$m \leftarrow \infty$; /* Το m θα πάρει την τιμή $m[i, j]$ */

for $k \leftarrow i$ **to** $j - 1$ **do**

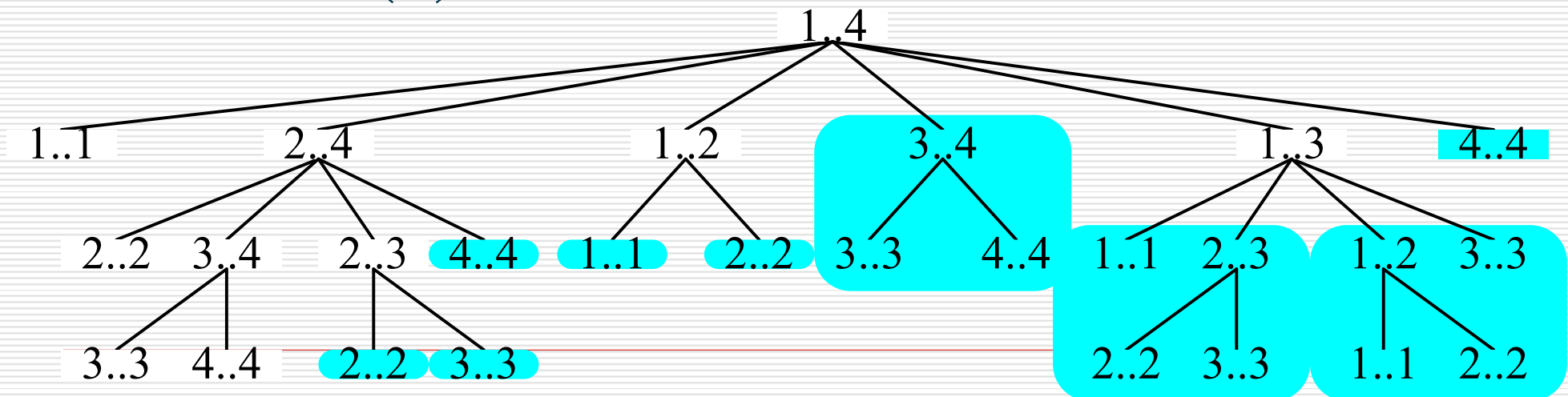
$q \leftarrow$ RecMatrixChain($d[i - 1, \dots, k]$) +

RecMatrixChain($d[k, \dots, j]$) + $d[i - 1]d[k]d[j]$;

if $q < m$ **then** $m \leftarrow q$;

return(m);

Χρόνος $\Omega(2^n)$!



Αναδρομή με Απομνημόνευση

- Ο αναδρομικός αλγόριθμος αποθηκεύει τιμές σε πίνακα. Κάθε τιμή υπολογίζεται μία φορά.
 - Συνδυάζει απλότητα top-down προσέγγισης με ταχύτητα bottom-up.

```
RecMemMatrixChain( $d[0, \dots, n]$ )  
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do  
    for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do  
       $m[i, j] \leftarrow \infty$ ;  
  return(RecCM( $d[0, \dots, n]$ ));
```

```
  RecCM( $d[i - 1, \dots, j]$ );  
  if  $m[i, j] < \infty$  then return( $m[i, j]$ );  
  if  $i = j$  then  $m[i, j] = 0$ ;  
  else  
    for  $k \leftarrow i$  to  $j - 1$  do  
       $q \leftarrow$  RecCM( $d[i - 1, \dots, k]$ ) +  
        RecCM( $d[k, \dots, j]$ ) +  
         $d[i - 1]d[k]d[j]$ ;  
      if  $q < m[i, j]$  then  $m[i, j] \leftarrow q$ ;  
  return( $m[i, j]$ );
```

ΔΠ vs ΔκΒ

- Δυναμικός Προγραμματισμός και Διαίρει-και-Βασίλευε επιλύουν προβλήματα **συνδυάζοντας λύσεις** κατάλληλα επιλεγμένων **υπο-προβλημάτων**.
- ΔκΒ είναι φύσει **αναδρομική μέθοδος (top-down)**.
- ΔκΒ επιλύει **υπο-προβλήματα ανεξάρτητα**.
 - Εφαρμόζεται όταν παράγονται **ανεξάρτητα υπο-προβ/τα**.
 - Ειδάλλως ίδια υπο-προβλήματα λύνονται πολλές φορές: Σπατάλη υπολογιστικού χρόνου.

ΔΠ vs ΔκΒ

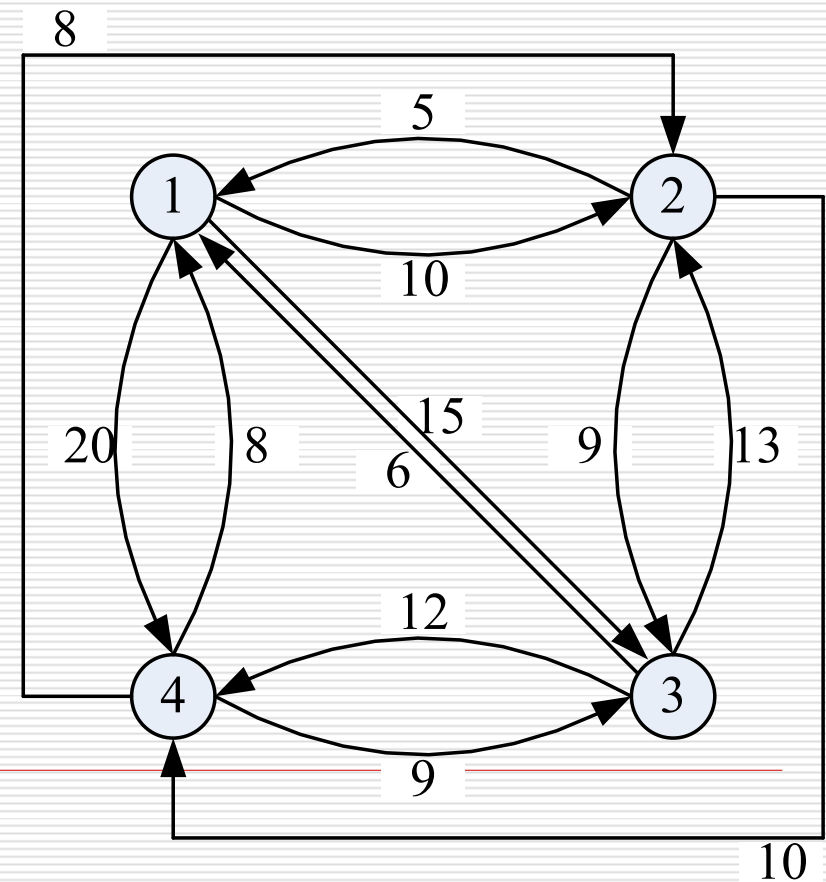
- ΔΠ «κτίζει» βέλτιστη λύση προβ/τος από βέλτιστες λύσεις υπο-προβ/των (bottom-up).
 - ΔΠ ξεκινά με στοιχειώδη στιγμιότυπα.
 - Συνδυάζει λύσεις για να βρει λύσεις σε μεγαλύτερα.
- ΔΠ εφαρμόζεται όταν υπο-προβ/τα επικαλύπτονται. Αποθηκεύει επιμέρους λύσεις για να μην υπολογίζει πάλι.
 - «Προγραμματισμός» διαδικασία συμπλήρωσης πίνακα με ενδιάμεσα αποτελέσματα (Bellman, 50's).
- ΔΠ εφαρμόζεται όταν ισχύει αρχή βελτιστότητας.
 - Διατύπωση αναδρομικής εξίσωσης για βέλτιστη λύση.
 - Αναδρομική εξίσωση λύνεται bottom-up για βέλτιστη τιμή.
 - Επιλογές κατά την επίλυση απαρτίζουν βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

- Δίνονται n σημεία $N = \{1, 2, \dots, n\}$ και αποστάσεις τους $d : N \times N \mapsto \mathbb{R}_+$
 - Απόσταση $i \rightarrow j = d_{ij}$, απόσταση $j \rightarrow i = d_{ji}$
 - Γενική περίπτωση: όχι συμμετρικές αποστάσεις, όχι τριγωνική ανισότητα.
- Ζητείται μια **περιοδεία ελάχιστου συνολικού μήκους**.
 - **Περιοδεία**: κύκλος που διέρχεται από κάθε σημείο μία φορά.
 - **Περιοδεία**: μετάθεση σημείων $\pi : N \mapsto N$, $\pi(1) = 1$
Μετάθεση (permutation): 1-1 και επί αντιστοιχία N με N .
 - Π.χ.
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 & 6 \end{array}$$
 - **Μήκος** περιοδείας π : $L(\pi) = d_{\pi(n)1} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi(i)\pi(i+1)}$

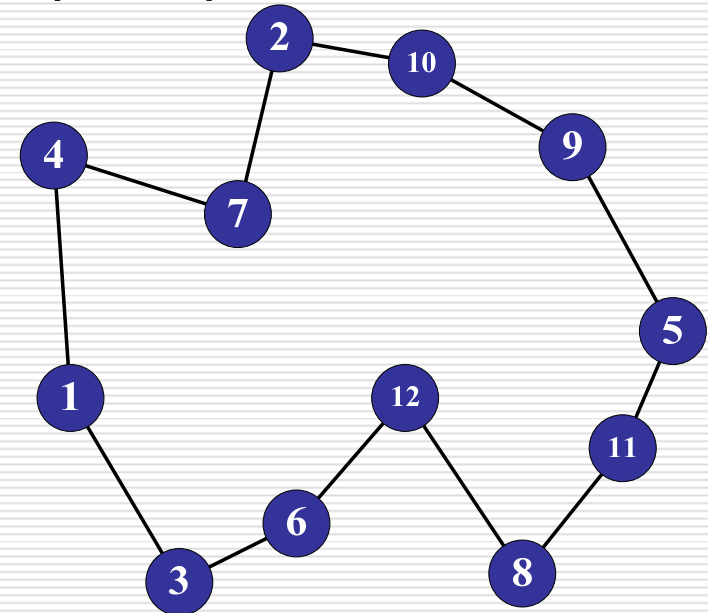
Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή

- Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:
 - Κάθε περιοδεία **εφικτή λύση** και αντιστοιχεί σε **μήκος**.
 - Ζητούμενο: (**βέλτιστη**) περιοδεία **ελάχιστου μήκους**.
- Εξαντλητική αναζήτηση:
 - #περιοδειών = $(n - 1)!$
 - Χρόνος $\Omega(n!)$
- ΠΠΠ είναι **NP-δύσκολο** και **δεν υπάρχει «γρήγορος»** (πολυωνυμικός) **αλγόριθμος**.
 - Δυναμικός προγραμματισμός λύνει γενική περίπτωση σε χρόνο $\Theta(n^2 2^n)$.



Αρχή Βελτιστότητας

- Βέλτιστη περιοδεία ξεκινάει $1 \rightarrow i$ και συνεχίζει ...
 - ... από $i \rightarrow$ όλα τα σημεία $N \setminus \{1, i\} \rightarrow 1$.
 - Αυτό το τμήμα βέλτιστο με αυτή την ιδιότητα.
 - Διαφορετικά, βελτιώνω τμήμα και περιοδεία συνολικά!
- Έστω $L(i, S)$ ελάχιστο μήκος για να ξεκινήσω από $i \rightarrow$ όλο το $S \rightarrow 1$, ($i \notin S$).
 - Αν $S \subset N \setminus \{1\}$, τότε $i \neq 1$ (το 1 προστίθεται τελευταίο).
 - Εύκολα $L(i, \emptyset) = d_{i1}$, $\forall i \neq 1$
 - $L(i, \{j\}) = d_{ij} + d_{j1}$



Αρχή Βελτιστότητας

□ Έστω $L(i, S)$ ελάχιστο μήκος για να ξεκινήσω από $i \rightarrow$ όλο το $S \rightarrow 1$, ($i \notin S$).

■ Αν $S \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$, τότε $i \neq 1$ (το 1 προστίθεται τελευταίο).

■ Εύκολα για $|S| = 0, 1, 2$:

$$L(i, \{j, \ell\}) = \min\{d_{ij} + d_{j\ell} + d_{\ell 1}, d_{i\ell} + d_{\ell j} + d_{j1}\}$$

$$L(i, \{j, \ell\}) = \min\{d_{ij} + L(j, \{\ell\}), d_{i\ell} + L(\ell, \{j\})\}$$

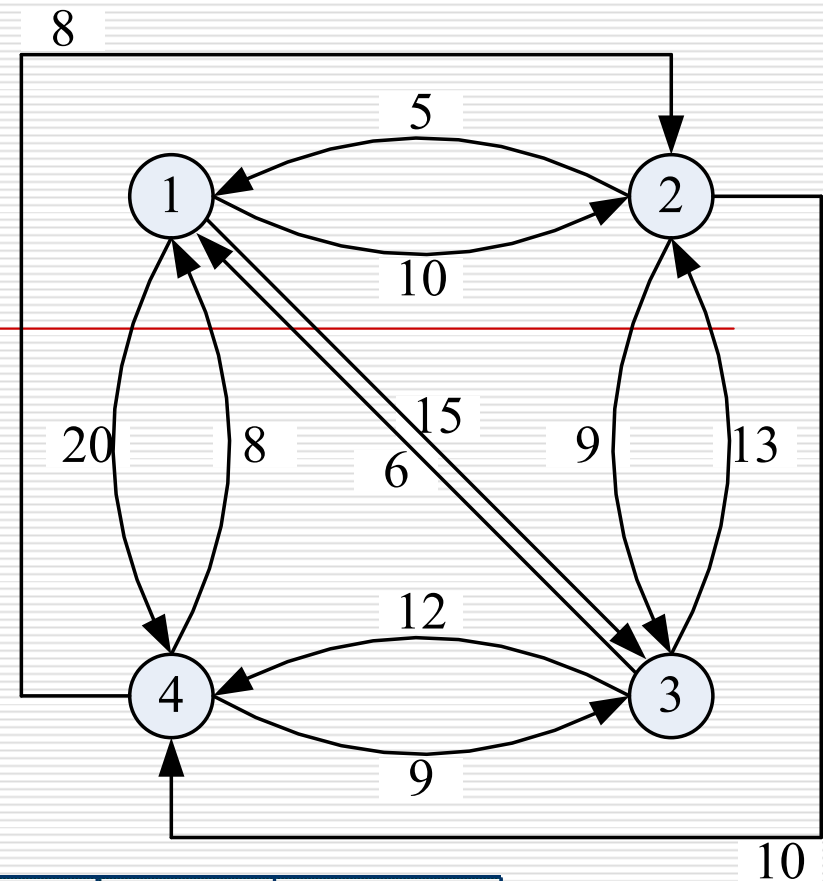
■ Υπολογίζω $L(i, S)$, $|S| = k$, αν γνωρίζω όλα τα $L(j, S \setminus \{j\})$:

$$L(i, S) = \min_{j \in S} \{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})\}$$

■ Υπολογίζω όλες τις βέλτιστες «υπο-περιοδείες» που τελειώνουν στο 1 και έχουν μήκος 1, 2, 3, 4, ..., για κάθε υποσύνολο αντίστοιχου μεγέθους.

Παράδειγμα

$$L(i, S) = \min_{j \in S} \{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})\}$$



$i S$	\emptyset	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{3, 4\}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$
1								35 (2)
2	5		15 (3)	18 (4)	25 (4)			
3	6	18 (2)		20 (4)		25 (4)		
4	8	13 (2)	15 (3)				23 (2)	

□ Βέλτιστη περιοδεία **1, 2, 4, 3** μήκους **35**.

Υλοποίηση

$$L(i, S) = \min_{j \in S} \{d_{ij} + L(j, S \setminus \{j\})\}$$

TSP($d[1 \dots n][1 \dots n]$)

for $i \leftarrow 2$ **to** n **do** $L(i, \emptyset) \leftarrow d[i, 1]$;

for $k \leftarrow 1$ **to** $n - 2$ **do**

for all $S \subset N \setminus \{1\}, |S| = k$ **do**

for all $i \in (N \setminus \{1\}) \setminus S$ **do**

$q \leftarrow \infty$;

for all $j \in S$ **do**

if $d[i, j] + L(j, S \setminus \{j\}) < q$ **then**

$q \leftarrow d[i, j] + L(j, S \setminus \{j\}); t \leftarrow j$;

$L(i, S) \leftarrow q; J(i, S) \leftarrow t$;

$q \leftarrow \infty$;

for $j \leftarrow 2$ **to** n **do**

if $d[1, j] + L(j, N \setminus \{1, j\}) < q$ **then**

$q \leftarrow d[1, j] + L(j, N \setminus \{1, j\}); t \leftarrow j$;

$L(1, N \setminus \{1\}) \leftarrow q; J(1, N \setminus \{1\}) \leftarrow t$;

return($L(1, N \setminus \{1\}), J$);

Μνήμη $\Theta(n 2^n)$

Χρόνος $\Theta(n^2 2^n)$

20 σημεία:

$$20! = 2.4 \times 10^{18}$$

$$20^2 2^{20} = 4.2 \times 10^8$$