Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκων: Δημήτρης Φωτάκης
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 2/11/2015

Άσκηση 1: Ασυμπτωτικός Συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις.

(α) Να ταξινομήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά τάξης μεγέθους, να βρείτε δηλαδή μια διάταξη $g_1, g_2, g_3, \ldots$ τέτοια ώστε $g_1 = \mathrm{O}(g_2)$, $g_2 = \mathrm{O}(g_3)$, κοκ. Σε αυτή τη διάταξη, να επισημάνετε τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους.

n^2	$2^{(\log_2 n)^3}$	$\log(n!)/(\log n)^3$	$n2^{2^{2^{100}}}$
$\log(\binom{n}{\log n})$	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\log^4 n$	$\sqrt{n!}$
$\binom{n}{6}$	$n^3/\log^{10} n$	$(\log_2(16n))^{\log_2(16n)}$	$\log\left(\binom{2n}{n}\right)$
$n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$	$\binom{2n}{n/4}$	$\sum_{k=1}^{n} k2^k$	$\sum_{k=1}^{n} k2^{-k}$

(β) Να υπολογίσετε την τάξη μεγέθους $\Theta()$ των λύσεων των παρακάτω αναδρομικών σχέσεων. Για όλες τις σχέσεις, να θεωρήσετε ότι $T(1) = \Theta(1)$.

1. $T(n) = 3T(n/4) + n\log^5 n$
2. $T(n) = 4T(n/4) + n\log^5 n$
3. $T(n) = 5T(n/4) + n\log^5 n$
4. $T(n) = 2T(n/3) + n/\log^5 n$
5. $T(n) = 2T(n/7) + 4T(n/9) + n$
6. $T(n) = T(n-1) + \log n$
7. $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \Theta(\log n)$
8. $T(n) = T(n/4) + \sqrt{n}$.

Άσκηση 2: Ταξινόμηση

(α) Θεωρούμε έναν πίνακα $A[1 \ldots n]$ με n στοιχεία και τους υποπίνακες $A_1[1 \ldots \frac{n}{k}]$, $A_2[\frac{n}{k}+1 \ldots 2\frac{n}{k}]$, $\ldots, A_k[(k-1)\frac{n}{k}+1 \ldots n]$ που προκύπτουν από την διαμέριση του A σε k τμήματα με n/k στοιχεία το καθένα (για απλότητα, υποθέτουμε ότι το n είναι πολλαπλάσιο του k, μπορείτε ακόμη να υποθέσετε ότι τα n και k είναι δυνάμεις του 2). Θα λέμε ότι ο πίνακας A είναι *ταξινομημένος κατά k μέρη* όταν για κάθε i και j, με $1 \leq i < j \leq k$, κάθε στοιχείο του υποπίνακα A_i είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε στοιχείο του υποπίνακα A_j. Δηλ. τα στοιχεία του A έχουν ταξινομηθεί "εξωτερικά", μεταξύ των υποπινάκων, αλλά όχι κατ' ανάγκη και "εσωτερικά" στον ίδιο υποπίνακα. Π.χ., ο πίνακας $A = [[12, 14, 20, 18], [25, 22, 29, 32], [37, 42, 34, 50], [67, 59, 52, 76]]$ είναι ταξινομημένος κατά 4 μέρη.

1. Να διατυπώσετε συγκριτικό αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O(n\log k)$ που ταξινομεί κατά k μέρη έναν πίνακα A με n στοιχεία. Να δείξετε ακόμη ότι ο αλγόριθμός σας είναι βέλτιστος, δηλ. ότι κάθε συγκριτικός αλγόριθμος ταξινόμησης κατά k μέρη ενός πίνακα με n στοιχεία έχει χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης $\Omega(n\log k)$.

2. Να διατυπώσετε συγκριτικό αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O(n \log \frac{n}{k})$ που ταξινομεί πλήρως έναν πίνακα A με n στοιχεία που αρχικά είναι ταξινομημένος κατά k μέρη. Να εξηγήσετε γιατί κάθε συγκριτικός αλγόριθμος για αυτό το πρόβλημα πρέπει να έχει χρόνο εκτέλεσης $\Omega(n \log \frac{n}{k})$.

(β) Πριν την επίδειξη γραπτών στο μάθημα "Προγραμματισμός Η/Υ", ταξινομούμε τα γραπτά σε αλφαβητική σειρά. Πέρυσι, κατά τη μεταφορά των γραπτών και μόλις $30'$ πριν την επίδειξή τους, η στοίβα σκορπίστηκε στο πάτωμα. Όταν μαζέψαμε τα γραπτά και προσπαθώντας να τα ταξινομήσουμε πάλι, παρατηρήσαμε ότι κάθε γραπτό βρισκόταν σε απόσταση το πολύ k θέσεων (προς τα πάνω ή προς τα κάτω) από την αρχική του θέση στην ταξινομημένη στοίβα. Έπρεπε λοιπόν να ταξινομήσουμε πολύ γρήγορα μια στοίβα με n γραπτά, που ήταν όμως *k-προταξινομημένη*, με την έννοια ότι κάθε γραπτό βρισκόταν σε απόσταση το πολύ k θέσεων από την τελική του θέση στην ταξινομημένη στοίβα.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό συγκριτικό αλγόριθμο για την ταξινόμηση ενός k-προταξινομημένου πίνακα με n στοιχεία. Να αιτιολογήσετε συνοπτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.
2. Να δείξετε ότι κάθε συγκριτικός αλγόριθμος για την ταξινόμηση ενός k-προταξινομημένου πίνακα με n στοιχεία έχει χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης $\Omega(n \log k)$.

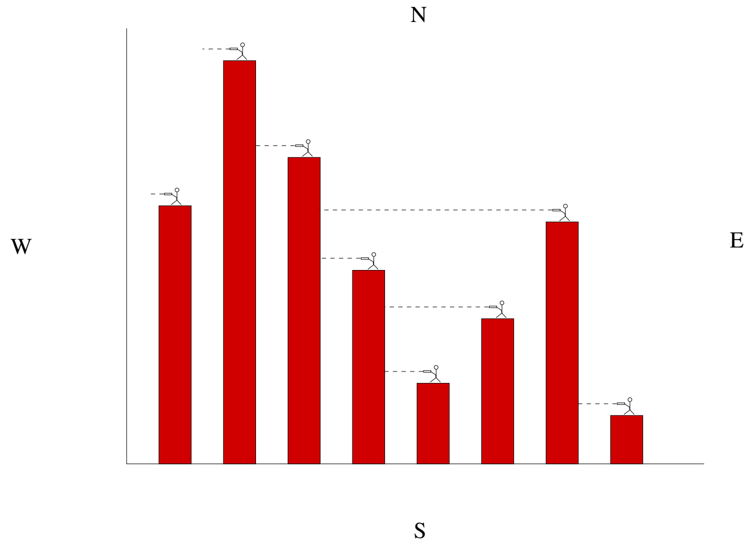
Άσκηση 3: Αναζήτηση

(α) Έχουμε 1.000.000 πανομοιότυπες φιάλες, μία από αυτές έχει ένα (άχρωμο, άοσμο, και άγευστο) πανίσχυρο μαγικό φίλτρο που προσφέρει απεριόριστη φυσική δύναμη και ευεξία, όλες οι άλλες έχουν καθαρό νερό. Το φίλτρο είναι αποτελεσματικό ακόμη και σε εξαιρετικά μικρές ποσότητες, όμως χρειάζεται 24 ώρες για να γίνουν εμφανή τα αποτελέσματά του. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό εθελοντών (και τον τρόπο που θα τους αξιοποιήσουμε) που απαιτούνται για να εντοπίσουμε τη φιάλη με το μαγικό φίλτρο μέσα στις επόμενες 24 ώρες.

(β) Πρόκειται να πάμε ένα μεγάλο ταξίδι που θα διαρκέσει $k \geq 2$ ημέρες. Έχουμε επιλέξει τους $n > k$ σταθμούς του ταξιδιού και έχουμε υπολογίσει τις αποστάσεις $d_1, d_2, \ldots, d_n$ μεταξύ τους (d_1 είναι η απόσταση του πρώτου σταθμού από την αφετηρία, d_2 είναι η απόσταση του πρώτου από τον δεύτερο σταθμό, κοκ., όλες οι αποστάσεις είναι θετικοί ακέραιοι). Για να μην κουραστούμε, θέλουμε να προγραμματίσουμε το ταξίδι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τη μέγιστη απόσταση που θα διανύσουμε μέσα σε μία ημέρα (μπορούμε να σταματήσουμε για διανυκτέρευση μόνο σε κάποιον από τους επιλεγμένους σταθμούς). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Απόλυτη Πλειοψηφία και Ισχυρή Πλειοψηφία

(α) Είστε επίσημος προσκεκλημένος στο Κοινοβούλιο της χώρας των Αλγορίθμων. Υπάρχουν $k \geq 2$ πολιτικά κόμματα που εκπροσωπούνται στο Κοινοβούλιο και n βουλευτές που καθένας τους ανήκει σε ένα πολιτικό κόμμα. Δεν υπάρχει κανένας τρόπος να βρείτε ποιος βουλευτής ανήκει σε ποιο πολιτικό κόμμα (και θα θεωρούνταν μεγάλη προσβολή αν αρχίσετε να ρωτάτε σχετικά). Μπορείτε μόνο να καταλάβετε αν δύο βουλευτές ανήκουν στο ίδιο κόμμα ή όχι από τον χαιρετισμό τους. Αν δύο βουλευτές ανήκουν στο ίδιο κόμμα, ο χαιρετισμός τους είναι εγκάρδιος και συνοδεύεται από χαμόγελα και φιλοφρονήσεις. Διαφορετικά, ο χαιρετισμός τους είναι ψυχρός και δεν ανταλλάσσουν κουβέντα. Μπορείτε ακόμη να ζητήσετε από τον Πρόεδρο του Κοινοβουλίου να κανονίσει ώστε ο χαιρετισμός μεταξύ συγκεκριμένων ζευγαριών βουλευτών να λάβει χώρα μπροστά σας (και με τη σειρά που εσείς επιλέγετε). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό (ως προς το πλήθος των χαιρετισμών που χρειάζεται να



Σχήμα 1. Ένα παράδειγμα για την Άσκηση 5 με 8 πολυκατοικίες. Το αποτέλεσμα είναι $B = [0, 0, 2, 3, 4, 4, 3, 7]$.

παρακολουθήσετε) αλγόριθμο που διαπιστώνει αν κάποιο πολιτικό κόμμα έχει απόλυτη πλειοψηφία στο Κοινοβούλιο. Αν υπάρχει τέτοιο κόμμα, θα πρέπει ο αλγόριθμός σας να μπορεί να βρει όλους τους βουλευτές που ανήκουν σε αυτό. Καλό είναι να μην αναγκάσετε το ίδιο ζευγάρι βουλευτών να χαιρετηθεί περισσότερες από μία φορές.

(β) Έστω πίνακας $A[1 \ldots n]$ με 0 και 1 που είτε περιέχει μόνο 0 είτε περιέχει 1 σε τουλάχιστον $n/3$ θέσεις (αυθαίρετα επιλεγμένες). Να διατυπώσετε έναν πιθανοτικό αλγόριθμο σταθερού χρόνου που αποφαίνεται σε ποια κατηγορία ανήκει ο πίνακας με πιθανότητα επιτυχίας τουλάχιστον 90%. Ποιος είναι ο ελάχιστος χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης για έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο;

Άσκηση 5: Πολυκατοικίες χωρίς Θέα

Κατά μήκος ενός πυκνοκατοικημένου δρόμου, χαραγμένου στη διεύθυνση ανατολή - δύση, υπάρχουν n πολυκατοικίες με διάφορα ύψη. Κατά μια περίεργη σύμπτωση, όλοι οι κάτοικοι του δρόμου είναι αμετανόητα ρομαντικοί και επιθυμούν να βλέπουν το ηλιοβασίλεμα από την ταράτσα της πολυκατοικίας τους. Καθώς όμως έχουν χτιστεί όλες αυτές οι πολυκατοικίες, κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό για τους περισσότερους. Θέλοντας λοιπόν να ρυθμίσουν την κατάσταση, αποφασίζουν την οργάνωση ενός είδους μονομαχίας (ως ρομαντικοί), ώστε να λυθεί το πρόβλημα. Εφοδιάζονται λοιπόν με όπλα και αποφασίζουν το επόμενο πρωί να ανέβουν στις ταράτσες τους και να προσπαθήσουν να διαλύσουν την πολυκατοικία που έχει μεγαλύτερο ύψος από τη δική τους και εμποδίζει τη θέα της δύσης (ή την πρώτη που βλέπουν από αυτές, αν είναι πολλές). Τα όπλα τους ρίχνουν μόνο στην ευθεία παράλληλα με το έδαφος και οι αποστάσεις είναι τέτοιες ώστε η βαρύτητα δεν παίζει κανένα ρόλο.

Ο Δήμαρχος πληροφορείται την κατάσταση και αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να ενεργήσει γρήγορα, αν θέλει να προλάβει τα χειρότερα. Για αυτό, προσπαθεί να υπολογίσει σε ποια πολυκατοικία θα σημαδέψουν εκείνο το πρωί οι κάτοικοι κάθε άλλης πολυκατοικίας. Αριθμεί τις πολυκατοικίες από τα δυτικά προς τα ανατολικά, και συμπληρώνει έναν πίνακα ακεραίων $A[1 \ldots n]$ με τα ύψη τους (το ύψος των ανθρώπων θεωρείται αμελητέο). Δεδομένου του πίνακα A, ο Δήμαρχος χρειάζεται να συμπληρώσει έναν πίνακα $B[1 \ldots n]$, όπου κάθε στοιχείο $B[i]$ δίνει την πολυκατοικία που θα δεχθεί τα πυρά των κατοίκων της πολυκατοικίας i (αν όλες οι πολυκατοικίες δυτικά της i έχουν ύψος μικρότερο ή ίσο του $A[i]$, τότε $B[i] = 0$, βλ. Σχήμα 1). Να βοηθήσετε το Δήμαρχο διατυπώνοντας έναν αλγόριθμο γραμμικού χρόνου για αυτό το πρόβλημα. Να επιμείνετε στην αναλυτική αιτιολόγηση του εκτέλεσης.